RECHERCHE DE L'EXPRESSION DE f-choix de la forme la plus appropriée

Table des matières

1 Sommet donné **1**
1.1 méthode 1
1.2 Exemple 1

2 Racines données **2**
2.1 méthode 2
2.2 Exemple 2

3 A partir de trois points quelconques de la parabole **2**
3.1 méthode 2
3.2 Exemple 2

1 Sommet donné

1.1 méthode

La fonction f polynôme du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ (forme développée).

La forme canonique est donnée par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, le sommet de la parabole représentant f a alors pour coordonnées $(\alpha;\beta)$.

- Les coordonnées du sommet $S(x_S;y_S)$ de la parabole permettent d'obtenir les valeurs de $\alpha = x_S$ et $\beta = y_S$
- On a alors $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
  Pour calculer a, il faut connaître les coordonnées d'un autre point de la parabole.
  Si on note $A(x_A;y_A)$ ce point de la parabole distinct de S, on a alors $f(x_A) = y_A$
- Il faut alors résoudre l'équation d'inconnue a puisque x_A, y_A, α et β sont connus dans l'équation $f(x_A) = a(x_A-\alpha)^2 + \beta = y_A$

1.2 Exemple

❒ Exemple 1 : Recherche de l'expression de f connaissant le sommet et un point de la parabole

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal
$\mathcal{P}$ admet pour minimum 2 en $x = -1$ et passe par le point de coordonnées $(2;3)$.
Déterminer une expression de f.

☛ **Solution**:

- $\mathcal{P}$ admet pour minimum 2 en $x = -1$ donc le sommet de la parabole a pour coordonnées $(-1;2)$
  donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ et $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
  On a donc $f(x) = a(x-(-1))^2 + 2 = a(x+1)^2 + 2$
- Le point de coordonnées $(2;3)$ appartient à $\mathcal{P}$
  donc $f(2) = a(2+1)^2 + 2 = 3$
- $a(2+1)^2 + 2 = 3 \Longleftrightarrow 9a = 1 \Longleftrightarrow a = \dfrac{1}{9}$

$$\boxed{\text{donc } f(x) = \frac{1}{9}(x+1)^2 + 2}$$

2 Racines données

2.1 méthode

La fonction f polynôme du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ (forme développée).

Si $f(x)$ admet deux racines x_1 et x_2, la forme factorisée est donnée par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Les racinesx_1 et x_2 de $f(x)$ permettent d'obtenir la forme factorisée de f
- On a alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
  Pour calculer a, il faut connaître les coordonnées d'un autre point de la parabole.
  Si on note $A(x_A; y_A)$ ce point de la parabole n'appartenant pas à l'axe des abscisses (soit $x_A \neq x_1$ et $x_A \neq x_2$), on a alors $f(x_A) = y_A$
- Il faut alors résoudre l'équation d'inconnue a puisque x_A, y_A, x_1 et x_2 sont connus
  dans l'équation $f(x_A) = a(x_A - x_1)(x_A - x_2) = y_A$

2.2 Exemple

❒ **Exemple 2 : Recherche de l'expression de f connaissant les points d'intersection de la parabole**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal
$\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$ et coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3.
Déterminer une expression de f.

☛ **Solution**:

- $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$
  donc x_1 et x_2 sont deux racines du polynôme de degré 2
  On a donc $f(x) = a(x - (-2))(x - 3) = a(x + 2)(x - 3)$
- $\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3
  donc $\mathcal{P}$ passe par le point de coordonnées (0 ;3)
- $f(0) = a(0 + 2)(0 - 3) = 3$
  $\iff -6a = 3$
  $\iff a = \dfrac{3}{-6} = \dfrac{-1}{2}$

$$\boxed{\text{donc } f(x) = \frac{-1}{2}(x+2)(x-3) \text{ (forme factorisée)}}$$

3 A partir de trois points quelconques de la parabole

3.1 méthode

La fonction f polynôme du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ (forme développée).

- Si on note $A(x_A; y_A)$ un point de la parabole, on a alors $f(x_A) = y_A$ (équation 1)
- Il faut alors écrire deux autre équations en utilisant les coordonnées de deux autres points connus de $\mathcal{P}$ puis résoudre un système de trois équations et trois inconnues

3.2 Exemple

❒ **Exemple 3 : Recherche de l'expression de f connaissant trois points quelconques de la parabole**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal
$\mathcal{P}$ passe par les points de coordonnées $(0;5)$, $(1;3)$ et $(-2;-3)$.
Déterminer une expression de f.

☛ **Solution**:

- Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ la forme développée de $f(x)$
  $\mathcal{P}$ passe par le point de coordonnées $(0;5)$
  donc $f(0)=a\times 0^2+b\times 0+c=5$ donc $c=5$
  et $f(x)=ax^2+bx+5$
- $\mathcal{P}$ passe par le point de coordonnées $(1;3)$
  donc $f(1)=a\times 1^2+b\times 1+5=a+b+5=3$ (équation n° 1)
- $\mathcal{P}$ passe par le point de coordonnées $(-2;-3)$
  donc $f(-2)=a\times(-2)^2+b\times(-2)+5=4a-2b+5=-3$ (équation n° 2)
- Il faut donc résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} a+b+5=3 \\ 4a-2b+5=-3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=-a-2 \\ 4a-2(-a-2)=-8 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=-a-2 \\ 4a+2a+4=-8 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=-a-2 \\ 6a=-12 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=-(-2)-2=0 \\ a=-2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{donc } f(x)=-2x^2+5}$