Table des matières

Suites arithmético-géométriques ($u_{n+1} = au_n + b$)

1 Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique

Méthode : Justifier qu'une telle suite n'est pas arithmétique ni géométrique

- On peut calculer u_0, u_1 et u_2
- Vérifier que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ pour justifier qu'elle n'est pas arithmétique.
- Vérifier $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ pour justifier qu'elle n'est pas géométrique.

Exemple 1 : Suite $u_{n+1} = au_n + b$

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$ et $u_0 = 3$
et la suite (w_n) est définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n - 6$.
Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Solution:

$u_0 = 3$
$u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + 4 = \dfrac{1}{3} \times 3 + 4 = 5$
$u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + 4 = \dfrac{1}{3} \times 5 + 4 = \dfrac{17}{3}$
$u_1 - u_0 = 5 - 3 = 2$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{17}{3} - 5 = \dfrac{2}{3}$
La différence de deux termes consécutifs n'est pas constante

$\boxed{\text{donc la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{17}{3}}{5} = \dfrac{17}{15}$
Le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant

$\boxed{\text{donc la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}}$

2 Utilisation d'une suite auxiliaire

Méthode : Montrer que (w_n) est géométrique

- On exprime w_{n+1} en fonction de u_{n+1}
- Remplacer u_{n+1} par son expression en fonction de u_n c'est à dire $au_n + b$
- Factoriser par a
- Vérifier que $w_{n+1} = aw_n$

Exemple 2 : Montrer que (w_n) est géométrique

Rappel : $w_n = u_n - 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$
Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

exercices d'applications ➢ ex 1-6-1 ➢ ex 1-6-2

Solution:

Pour tout entier naturel n, on a :
$w_n = u_n - 6$ donc $w_{n+1} = u_{n+1} - 6$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 \text{ (on remplace } u_{n+1} \text{ par } \frac{1}{3}u_n + 4) \\ &= \frac{1}{3}u_n - 2 \text{ (on factorise par le coefficient de } u_n) \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 6) \\ &= \frac{1}{3}w_n \text{ (on remplace } u_n - 6 \text{ par } w_n) \end{aligned}$$

donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

3 Déterminer la forme explicite de (w_n)

Méthode : Déterminer la forme explicite de (u_n)

- Calculer w_0 (ou w_1 si $n \geq 1$) en prenant $n = 0$ dans la relation liant w_n et u_n
- Donner la forme explicite de (w_n) suite géométrique.
  Rappel : $w_n = w_0q^n$ et $w_n = w_1q^{n-1}$
- On a $w_n = u_n + k$ donc $u_n = w_n - k$

❒ Exemple 3 : Forme explicite de (u_n)

Rappel : $w_n = u_n - 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$ et $u_0 = 3$

Exprimer w_n puis u_n en fonction de n.

exercice d'application ➢ ex 1-6-1 ➢ ex 1-6-2

☛ **Solution**:

On a $w_n = u_n - 6$
donc pour $n = 0$: $w_0 = u_0 - 6 = 3 - 6 = -3$

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et premier terme $w_0 = -3$
Pour tout entier naturel n, on a :
$w_n = w_0 q^n = -3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -3 \times \frac{1}{3^n}$

$w_n = u_n - 6 \iff u_n = w_n + 6$
donc $u_n = w_n + 6 = -3 \times \frac{1}{3^n} + 6 = 6 - 3 \times \frac{1}{3^n}$

$\boxed{u_n = 6 - 3 \times \frac{1}{3^n}}$

4 Variations de la suite (u_n)

❒ Exemple 4 : Variations de la suite (u_n)

Rappel : $u_n = 6 - 3 \times \frac{1}{3^n}$

Etudier les variations de la suite (u_n).

exercice d'application ➢ ex 1-6-4

☛ **Solution**:

Pour tout entier naturel n, on a :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3}u_n + 4 - u_n \\
&= \frac{1}{3}u_n + 4 - \frac{3u_n}{3} \\
&= \frac{-2}{3}u_n + 4 \\
&= \frac{-2}{3}(6 - 3 \times \frac{1}{3^n}) + 4 \\
&= \frac{-12}{3} + \frac{6}{3} \times \frac{1}{3^n} + 4
\end{aligned}
$$

$$= -4 + 2 \times \frac{1}{3^n} + 4$$

$$= 2 \times \frac{1}{3^n}$$

$\frac{1}{3^n} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

5 Recherche de la limite de u_n

Méthode : Limite de la suite (u_n)

➢ Déterminer la limite de w_n en utilisant la raison de (w_n)

Rappel : Si la raison q de (w_n) est comprise entre -1 et 1, $w_n \longrightarrow 0$

➢ En déduire la limite de $u_n = w_n + k$

❒ **Exemple 5 : Limite de u_n**

Etudier la limite de la suite (u_n) de l'exemple 4.

exercice d'application ➢ ex 1-6-4

☛ **Solution**:

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et $-1 < q < 1$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$
$u_n = w_n + 6$
donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 6}$$