réf 1690 ncjet BAC spé maths Amérique du Nord 2025

Exercice 1 (6 points) Probabilités et loi binomiale | ★★ | temps estim0-45mn

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C.

Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25% des connexions transitent via le serveur A ;
- 15% des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs.

L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90% des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80% des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85% des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

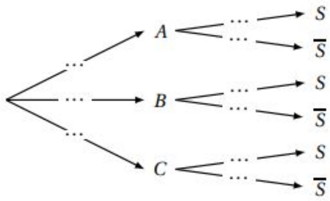
A : "La connexion s'est effectuée via le serveur A" ;

B : " La connexion s'est effectuée via le serveur B" ;

C : " La connexion s'est effectuée via le serveur C" ;

S : " La connexion est stable".

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à $0,12$.

3. Calculer la probabilité $p(C \cap \overline{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $p(S) = 0,855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable. Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.

On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie B

D'après la partie A, la probabilité qu'une connexion soit instable est égale à $0,145$.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard.

On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b) Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. On donnera la valeur arrondie au millième.

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $0,145$.

a) Donner l'expression en fonction de n de la de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

b) Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à $0,99$.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ où X_n est la variable aléatoire définie à la question 2.

a) Calculer l'espérance $E(F_n)$.

On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123975}{n}$

b) On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123975}{n}$.

Vérifier que $p(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \dfrac{12,5}{n}$

c) Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$.

Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

Exercice 2 (5 points) Suites	★★	temps estim0-40mn

La suite numérique (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a) Calculer a_0 et a_1.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal á 1, $a_n \geq 3n - 1$

d) En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def algo(p):
  u=2
  n=0
  while u-1>p:
    u=(2*u+1)/(u+2)
    n=n+1
  return (n,u)
```

a) Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction algo(p) dans le contexte de l'exercice.

b) Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

Exercice 3 (4 points) Géométrie dans l'espace | ★★ | temps estim0-40mn

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \qquad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 6t \end{cases}$$

On considère également les points suivants :

$A(3\ ;\ -3\ ;\ -2)$, $B(5\ ;\ -4\ ;\ -1)$, C le point de la droite (d) d'abscisse 2

et H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1 : La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2 : Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$x + 3z + 3 = 0$

Affirmation 3 : Une mesure, exprimée en radians, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Affirmation 4 : La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Exercice 4 (5 points) équation diférentielle et étude d'une fonction | ★ | temps estim0-40mn

La partie C est indépendante des parties A et B.

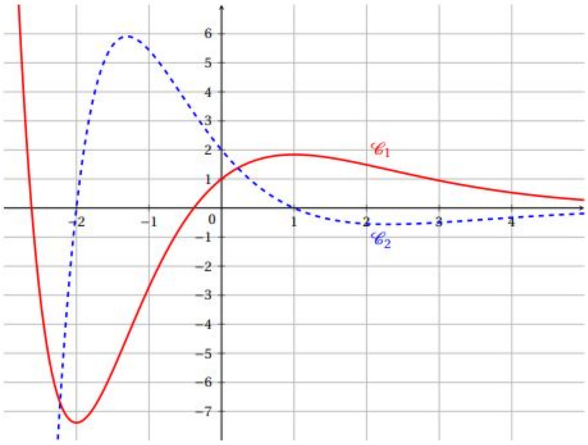
Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'.

On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.

-La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle $y + y' = (2x+3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right) e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer alors l'expression de la fonction g.

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right) e^{-x}$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right) e^{-x}$.

b) Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2 - 5x - 7\right) e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

Soit α un nombre réel positif.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.