réf 1690 sujet BAC spé maths Amérique du Nord 2025

Exercice 1 (6 points) Probabilités et loi binomiale | ★★ | temps estim0-45mn

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C.

Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25% des connexions transitent via le serveur A ;

- 15% des connexions transitent via le serveur B ;

- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs.

L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90% des connexions via le serveur A sont stables ;

- 80% des connexions via le serveur B sont stables ;

- 85% des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

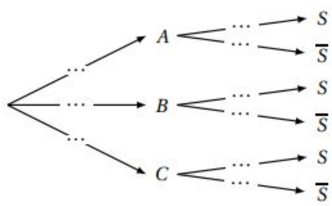
A : "La connexion s'est effectuée via le serveur A" ;

B : " La connexion s'est effectuée via le serveur B" ;

C : " La connexion s'est effectuée via le serveur C" ;

S : " La connexion est stable".

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



☛ **Solution**:

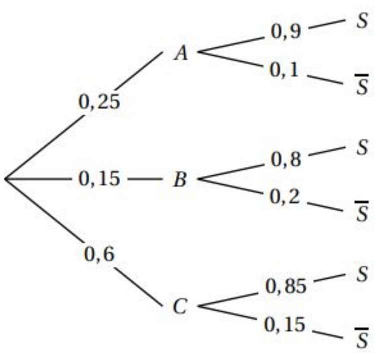
Puisqu'on s'intéresse à une connexion au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions annoncées dans l'énoncé sont assimilables à des probabilités.

90% des connexions via le serveur A sont stables se note $p_A(S) = 0,9$

80% des connexions via le serveur B sont stables se note $p_B(S) = 0,8$

85% des connexions via le serveur C sont stables se note $p_C(S) = 0,85$

Cela donne l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à $0,12$.

☛ **Solution**:

La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B se note $p(S \cap B)$.

$p(S \cap B) = p(B) \times p_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$.

$\boxed{\text{La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à } p(S \cap B) = 0,12.}$

3. Calculer la probabilité $p(C \cap \overline{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

☛ **Solution**:

MATHS-LYCEE.FR –Terminale spécialité sujets BAC 2025

$p(C\cap\overline{S})=p(CB)\times p_C(\overline{S})=0,6\times 0,15=0,09.$

La probabilité que la connexion soit instable et passe par le serveur C est égale à $p(C\cap\overline{S})=0,09.$

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $p(S)=0,855$.

☛ **Solution**:

Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S)=p(A)\times p_A(S)+p(B)\times p_B(S)+p(C)\times p_C(S)$$

$$=0,25\times 0,9+0,15\times 0,8+0,6\times 0,85$$

$$=0,225+0,12+0,51$$

$$=0,855$$

La probabilité de l'évènement S est donc bien $P(S)=0,855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable. Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.

On donnera la valeur arrondie au millième.

☛ **Solution**:

$$p_S(B)=\frac{p(S\cap B)}{p(S)}$$
$$=\frac{0,12}{0,855}$$
$$=\frac{8}{57}$$
$$\approx 0,1403.$$

La probabilité que la connexion transite par B, sachant qu'elle est stable est d'environ $0,140$.

Partie B

D'après la partie A, la probabilité qu'une connexion soit instable est égale à $0,145$.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard.

On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

☛ **Solution**:

On répète 50 fois une épreuve de Bernoulli donc $n = 50$

La probabilité de succès est $p = p(S) = 0,145$

$\boxed{\text{donc } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 50 \text{ et } p = 0,145 \text{ notée } B(50; 0,145)}$

b) Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. On donnera la valeur arrondie au millième.

☛ **Solution**:

Avec la calculatrice (voir vidéo) $p(X \leq 8) \approx 0,7044$

$\boxed{\text{donc la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est } 0,704 \text{ arrondi au millième.}}$

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $0,145$.

a) Donner l'expression en fonction de n de la de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

☛ **Solution**:

MATHS-LYCEE.FR –Terminale spécialité sujets BAC 2025

L'évènement "au moins une connexion de cet échantillon est instable" est l'évènement contraire de "aucune connexion de cet échantillon n'est instable"

$\boxed{p_n = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,855^n = 1 - 0,855^n.}$

b) Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à $0,99$.

☛ **Solution**:

$p_n \geqslant 0,99$

$\Longleftrightarrow 1 - 0,855^n \geq 0,99$

$\Longleftrightarrow -0,855^n \geq -0,01$

$\Longleftrightarrow 0,855^n \leq 0,01$ ⚠ l'inégalité change de sens en multipliant par -1

$\Longleftrightarrow ln\,(0,855^n) \leq ln(0,01)$

$\Longleftrightarrow nln\,(0,855) \leq ln(0,01)$

$\Longleftrightarrow n \geq \dfrac{ln(0,01)}{\ln\,(0,855)}$ ⚠ l'inégalité change de sens car $ln(0,855) < 0$

Or $\dfrac{ln(0,01)}{ln\,(0,855)} \approx 29,4$ et n est un entier

donc $n \geq 30$

$\boxed{\text{donc à partir de } n = 30 \text{ on a une probabilité } p_n \text{ supérieure ou égale à 0,99.}}$

3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ où X_n est la variable aléatoire définie à la question 2.

a) Calculer l'espérance $E(F_n)$.

On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123975}{n}$

☛ **Solution**:

Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,145$, alors l'espérance de X_n est $E(X_n) = 0,145n$.

On a ensuite $F_n = \dfrac{1}{n} \times X_n$,

donc, par linéarité de l'espérance :

$E(F_n) = \dfrac{1}{n}E(X_n) = \dfrac{1}{n} \times 0,145n = 0,145$.

$\boxed{\text{donc } E(F_n) = 0,145}$

b) On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123975}{n}$.

Vérifier que $p(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \dfrac{12,5}{n}$

☛ **Solution**:

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la moyenne F_n, avec une précision $\delta = 0,1$:

$p(|F_n - E(F_n)| \geq \delta) \leq \dfrac{V(F_n)}{\delta^2}$

donc $p(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \dfrac{\frac{0,123975}{n}}{0,1^2}$

$\dfrac{\frac{0,123975}{n}}{0,1^2} = \dfrac{0,123975}{n} \times \dfrac{1}{0,01} = \dfrac{12,3975}{n}$

Or $12,3975 < 12,5$

$\boxed{\text{donc on a bien } p(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \dfrac{12,5}{n}}$

c) Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$.

Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

☛ **Solution**:

Si on étudie un échantillon de 1000 connexions et que l'on constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$, alors on a d'après la question précédente :

$p(|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1) \leq \dfrac{12,5}{1000}$

soit $p(|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1) \leq 0,0125$

donc si $F_{1000} = 0,3$ alors $F_{1000} - 0,145 = 0,155$ et donc $|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1$

or la probabilité de cet évènement est inférieure ou égale à $0,0125$ donc il y a une très faible probabilité de se retrouver dans cette situation ($F_{1000} = 0,3$)

Il est donc hautement probable que les serveurs dysfonctionnent, car si la modélisation (basée sur un fonctionnement normal des serveurs) est fiable, une telle fréquence est très peu probable.

Exercice 2 (5 points) Suites	★★	temps estim0-40mn

La suite numérique (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

☛ **Solution**:

$$u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

$\boxed{u_1 = 1,25}$

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a) Calculer a_0 et a_1.

☛ **Solution**:

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2$$
$$\text{et } a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{1,25}{1,25 - 1} = \frac{1,25}{0,25} = 5.$$

$\boxed{a_0 = 2 \text{ et } a_1 = 5}$

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

☛ **Solution**:

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \\
&= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} \\
&= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}} \\
&= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}} \\
&= \frac{2u_n+1}{u_n+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1} \\
&= \frac{2u_n+1}{u_n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3a_n-1 &= 3\times\frac{u_n}{u_n-1}-1 \\
&= \frac{3u_n}{u_n-1}-\frac{u_n-1}{u_n-1} \\
&= \frac{3u_n-(u_n-1)}{u_n-1} \\
&= \frac{2u_n+1}{u_n-1}
\end{aligned}$$

donc pour tout entier naturel n, on a bien $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal á 1, $a_n \geq 3n-1$

☛ **Solution**:

On note P_n la propriété $a_n \geq 3n-1$ pour $n \geq 1$

Initialisation

$a_1 = 5$ et $3\times 1 - 1 = 2$

donc l'affirmation P_1 est donc vraie.

Hérédité

On suppose que 'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que l'affirmation P_n est vraie, c'est-ire que $a_n \geqslant 3n-1$.

et on veut montrer que P_{n+1} est vraie soit $a_{n+1} \geq 3(n+1)-1$ soit $a_{n+1} \geq 3n+2$

MATHS-LYCEE.FR –Terminale spécialité sujets BAC 2025

Rappel : On a $a_{n+1} = 3a_n - 1$

$a_n \geq 3n - 1$

donc $3a_n \geq 3(3n - 1)$

soit $3a_n - 1 \geq 3(3n - 1) - 1$

donc $3a_n - 1 \geq 9n - 4$

On a donc $a_{n+1} \geq 9n - 4$

Il faut vérifier que $9n - 4 \geq 3n + 2$

$9n - 4 - (3n + 2) = 6n - 6 = 6(n - 1)$ et $n \geq 1$

donc $9n - 4 \geq 3n + 2$

On a donc montré que $a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1$ donc que P_{n+1} est vraie

L'affirmation P_1 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, P_n vraie implique P_{n+1} vraie

donc on a montré par récurrence que $a_n \geqslant 3n - 1$ pour tout entier $n \geq 1$

d) En déduire la limite de la suite (a_n).

☛ **Solution**:

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3n - 1 = +\infty$

et $a_n \geq 3n - 1$

donc par comparaison, on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

☛ **Solution**:

$a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$

$\Longleftrightarrow a_n \times (u_n - 1) = u_n$ car $u_n - 1 \neq 0$

$\Longleftrightarrow a_n \times u_n - a_n - u_n = 0$

$\iff (a_n - 1) \times u_n - a_n = 0$

$\iff (a_n - 1) \times u_n = a_n$

$\iff u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$

$\boxed{\text{donc } u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1} \text{ pour tout entier naturel } n}$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

☛ **Solution**:

$$u_n = \frac{a_n}{a_n\left(1 - \dfrac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$

puis, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{a_n} = 1$,

enfin, par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}} = 1$.

$\boxed{\text{donc la suite } (u_n) \text{ converge donc vers } 1.}$

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo(p):
  u=2
  n=0
  while u-1>p:
    u=(2*u+1)/(u+2)
    n=n+1
  return (n,u)
```

a) Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction algo(p) dans le contexte de l'exercice.

☛ **Solution**:

Cette fonction python initialise la variable u ce qui est la valeur de u_0 et la variable n ce qui est l'indice correspondant.

Puis, aque exécution de la boucle while, u se voit affecter le terme suivant dans la suite (u_n) puisque $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ et n se voit affecter l'entier suivant, donc l'indice correspondant au terme dont la valeur est stockée dans la variable u

Cette boucle while (TANT QUE) s'exécute tant que l'écart entre le terme stocké dans la variable u et la limite 1 est strictement supérieur valeur p, qui est l'argument choisi pour invoquer la fonction.

Les valeurs n et u renvoyées par la fonction correspondent donc respectivement indice n rtir duquel l'écart entre u_n et 1 est inférieur ou égal valeur p choisie.

b) Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

☛ **Solution**:

On parcourt le tableau de valeurs de la suite sur la calculatrice, et on constate que $u_5 \approx 1,0027$ donc $u_5 - 1 > 0,001$ et $u_6 \approx 1,0009$, donc $u_6 - 1 \leq 0,001$.

$\boxed{\text{La valeur de } n \text{ pour } p = 0,001 \text{ est donc } 6}$

$\boxed{\text{et la valeur renvoyée pour } u \text{ est donc une valeur approchée de } u_6}$

Remarque

On peut aussi programmer cet algorithme en Python sur la calculatrice

Exercice 3 (4 points) Géométrie dans l'espace	★★	temps estim0-40mn

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \qquad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 6t \end{cases}$$

On considère également les points suivants :

$A(3\ ;\ -3\ ;\ -2)$, $B(5\ ;\ -4\ ;\ -1)$, C le point de la droite (d) d'abscisse 2

et H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1 : La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

☛ **Solution**:

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) (coefficients de t)

$\overrightarrow{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées

Ces deux vecteurs sont orthogonaux $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{j}=0$ donc ne sont pas colinéaires Il faut maintenant vérifier que (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites sécantes.

Une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées est $\begin{cases}x=0\\y=0+s\\z=0\end{cases}$ où $s\in\mathbb{R}$

Recherche du point d'intersection :

On peut résoudre le système formé avec les deux premières équations

$\begin{cases}3-2t=0\\-1=s\end{cases}$

$\iff\begin{cases}t=\dfrac{3}{2}\\-1=s\end{cases}$

On doit aussi avoir $2-6t=0\iff t=\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{3}{2}$

donc le système n'admet pas de solution, donc les droites n'ont pas de point commun.

donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni sécantes donc elles sont donc non coplanaires.

$\boxed{\text{donc l'affirmation 1 est vraie.}}$

Affirmation 2 : Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$x+3z+3=0$

☛ **Solution**:

$x_A+3z_A+3=3+3\times(-2)+3=0$ donc A appartient au plan.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) (coefficients de t)

et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ (coefficients de x, y et z) est un vecteur normal au plan

On a $-2\times\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}$

donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur normal au plan donc le plan est bien orthogonal à (d) et passe par A

$\boxed{\text{donc l'affirmation 2 est vraie}}$

Affirmation 3 : Une mesure, exprimée en radians, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

☛ **Solution**:

Il faut calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Coordonnées de C :

C est un point de (d), il existe donc un réel t tel que $\begin{cases} x_C = 3 - 2t \\ y_C = -1 \\ z_C = 2 - 6t \end{cases}$

et on a $x_C = 2$ donc $3 - 2t = 2 \Longleftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

On a alors $z_C = 2 - 6 \times \dfrac{1}{2} = 2 - 3 = -1$

et donc $C(2\ ;\ -1\ ;\ -1)$.

Calcul des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le repère est orthonormé donc :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3$

Calcul des distances AB et AC :

$AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$

donc $-3 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$

soit $cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

et donc une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.

$\boxed{\text{donc l'affirmation 3 est fausse.}}$

Affirmation 4 : La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

☛ **Solution**:

Calcul des coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point B sur la plan $\mathcal{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite Δ orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par le point B.

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ.

$B(5\ ;\ -4\ ;\ -1) \in \Delta$, une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 + 0t \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

Coordonnées du point H intersection entre la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$

Le plan a pour équation $x + 3z - 7 = 0$ et on remplace x, y et z pour trouver la valeur de t :

$(5 + t) + 3(-1 + 3t) - 7 = 0$

$\iff 5 + t - 3 + 9t - 7 = 0$

$\iff 10t = 5$

$\iff t = \dfrac{1}{2}$

$x_H = 5 + t = 5 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{2}$

$z_H = -1 + 3t = -1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

donc $H\left(\dfrac{11}{2}\ ;\ -4\ ;\dfrac{1}{2}\right)$

On a donc : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{10}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}. \end{aligned}$$

donc la distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

donc l'affirmation 4 est vraie.

Exercice 4 (5 points) équation diférentielle et étude d'une fonction | ★ | temps estim0-40mn

La partie C est indépendante des parties A et B.

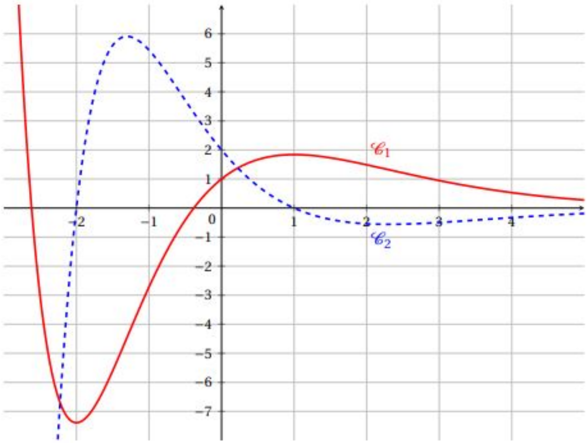
Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'.

On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.

-La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

☛ **Solution**:

La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_1$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -2]$ et sur $[1\ ;\ +\infty[$ donc sa dérivée est négative sur $]-\infty\ ;\ -2]$ et sur $[1\ ;\ +\infty[$

or la courbe $\mathcal{C}_2$ est en-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty\ ;\ -2]$ et sur $[1\ ;\ +\infty[$

La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_1$ est croissante sur $[-2\ ;\ 1]$ et la fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_2$ est négative sur $[-2\ ;\ 1]$

donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction g et la courbe $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fon

2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

☛ **Solution**:

Avec la courbe $\mathcal{C}_2$ on a $g'(0) = 2$ et avec la courbe $\mathcal{C}_1$ on a $g(0) = 1$

$y = g'(0)(x - 0) + g(0) = 2x + 1$

$\boxed{\text{L'équation réduite de la tangente à la courbe } \mathcal{C}_1 \text{ est } y = 2x + 1}$

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle $y + y' = (2x + 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right) e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

☛ **Solution**:

On pose $u(x) = x^2 + 3x$ et $v(x) = e^{-x}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$

donc $f_0 = u \times v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = (-x)'e^{-x} = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)\left(-e^{-x}\right) \\ &= (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} \\ &= (-x^2 - x + 3)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(x) + f_0'(x) &= (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} \\ &= e^{-x}(x^2 + 3x - x^2 - x + 3) \\ &= e^{-x}(2x + 3) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc } f_0 \text{ est une solution de } (E)}$

2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.

☛ **Solution**:

On a $y' = -y$ donc de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$

$\boxed{\text{donc les solutions sont de la forme } x \longmapsto Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}.}$

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

☛ **Solution**:

(E) est une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$, avec f_0 solution particulière donc les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{-x} + f_0(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{donc les fonctions } x \longmapsto \left(x^2 + 3x + C\right) e^{-x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.}$

4. On admet que la fonction g décrite dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer alors l'expression de la fonction g.

☛ **Solution**:

La fonction g décrite dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E), il existe donc un réel C tel que pour tout réel x, $g(x) = \left(x^2 + 3x + C\right) e^{-x}$.

Or $g(0) = 1$ donc $1 = (0^2 + 3 \times 0 + C)e^0 = C$ (rappel $e^0 = 1$)

$\boxed{\text{donc } g(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right) e^{-x}.}$

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

☛ **Solution**:

La courbe admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde de la fonction s'annule exactement deux fois en changeant de signe.

f une solution de l'équation différentielle (E) donc pour tout réel x, $f(x) = \left(x^2+3x+C\right)e^{-x}$.

Calcul de $f''(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)\times e^{-x} + \left(x^2+3x+C\right)\times\left(-e^{-x}\right) \\ &= \left(2x+3-x^2-3x-C\right)e^{-x} \\ &= \left(-x^2-x+3-C\right)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x-1)\times e^{-x} + \left(-x^2-x+3-C\right)\times\left(-e^{-x}\right) \\ &= \left(-2x-1+x^2+x-3+C\right)e^{-x} \\ &= \left(x^2-x-4+C\right)e^{-x} \end{aligned}$$

$e^{-x}>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x^2-x-4+C$.

$x^2-x-4-C$ s'annule deux fois en changeant de signe si et seulement si son discriminant est strictement positif.

$\Delta = (-1)^2-4\times 1\times(-4+C) = 1+16-4C = 17-4C$

$\Delta > 0 \Longleftrightarrow 17-4C>0 \Longleftrightarrow \dfrac{17}{4} > C$

$\boxed{\text{donc solutions de } (E) \text{ dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion sont } x \longmapsto \left(x^2+3x+C\right)e^{-x} \text{ avec } C < \frac{17}{4}.}$

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$f(x) = \left(x^2+3x+2\right)e^{-x}$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2+3x+2\right)e^{-x} \\ &= \frac{x^2}{e^x} + 3\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

Par croissances comparées : pour tout entier n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

soit par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$

$\boxed{\text{donc par somme } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right) e^{-x}$.

☛ **Solution**:

$$f'(x) = (2x+3)\, e^{-x} + \left(x^2 + 3x + 2\right)\left(-e^{-x}\right)$$

$$= \left(2x + 3 - x^2 - 3x - 2\right) e^{-x}$$

$$= \left(-x^2 - x + 1\right) e^{-x}$$

$\boxed{\text{donc } f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right) e^{-x}}$

b) Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

☛ **Solution**:

e^{-x} est strictement positive sur $\mathbb{R}$

donc $f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré $-x^2 - x + 1$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 1 + 4 = 5 > 0$

Le polynôme admet donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Le coefficient de x^2 est négatif on en déduit donc :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘	0

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

☛ **Solution**:

$e^{-x} > 0$ donc $f(x)$ est du signe du polynôme du second degré x^2+3x+2.

$\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 2 = 1$

donc les racines sont donc -2 et -1.

De plus le coefficient de x^2 est positif donc x^2+3x+2 est positif sur $]-\infty;-2]\cup[-1;+\infty[$

donc sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

$\boxed{\text{donc la fonction } f \text{ est donc positive sur l'intervalle } [0\ ;\ +\infty[.}$

4. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2-5x-7\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

Soit α un nombre réel positif.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$.

☛ **Solution**:

La fonction f est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc sur $[0\ ;\ \alpha]$ donc l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$ est égale à $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha) &= \int_0^\alpha f(x)dx\\ &= \Big[F(x)\Big]_0^\alpha\\ &= F(\alpha)-F(0)\\ &= \left(-\alpha^2-5\alpha-7\right)e^{-\alpha}+7 \text{ car } F(0)=\left(-0^2-5\times 0-7\right)e^{-0}=-7\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'aire cherchée est égale à } \left(-\alpha^2-5\alpha-7\right)e^{-\alpha}+7 \text{ unités d'aire.}}$