

**Exercice 1 (5 points) Géométrie dans l'espace**

temps estim 0-45mn

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère :

□ α un réel quelconque ;

□ les points $A(1; 1; 0)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(\alpha; 3; \alpha)$;

□ (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α , les points A , B et C définissent un plan et un vecteur normal au plan est $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

☛ **Solution:**

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ puisque $y_{\overrightarrow{AB}} = 0$ et $y_{\overrightarrow{AC}} = 2$

donc quel que soit le réel α , ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et donc A , B et C définissent bien un plan.

Le repère étant orthonormé, on peut calculer les produits scalaire :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha - 1) \times 0 + 2 \times 1 + \alpha \times 0 = 2.$$

donc $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{j}$ ne sont pas orthogonaux, donc $\vec{j}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC)

donc cette affirmation est fausse.

Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.





☛ **Solution:**

D'après la représentation paramétrique, la droite (d) admet pour vecteur directeur par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On rappelle : $\vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

et $x_{\vec{u}} = 1 = x_{\vec{AC}} = \alpha - 1$ pour $\alpha = 2$

Si $\alpha = 2$ alors $z_{\vec{AC}} = 2 \neq z_{\vec{u}}$

donc $\vec{u}$ et $\vec{AC}$ ne peuvent être égaux (donc ne peuvent pas être colinéaires) quelque soit la valeur de α

donc les droites (AC) et (d) ne peuvent pas être parallèles

donc l'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3 : Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est 135° .

☛ **Solution:**

O est l'origine du repère

Les coordonnées de $\vec{OA}$ sont celles du point A , donc celles de $\vec{AO} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a aussi $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On peut calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs puisque le repère est orthonormé.

$$\vec{AO} \cdot \vec{AB} = -1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = -1.$$

$$AO = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{et } AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{AB} = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB}) = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB}).$$

On a donc :

$$-1 = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB}),$$

$$\iff \cos(\widehat{OAB}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{donc } \widehat{OAB} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \text{ soit effectivement } 135 \text{ degrés } \left(\frac{3 \times 180}{4} \right)$$

donc l'affirmation 3 est vraie.





Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point $H(1 ; 2 ; 2)$.

☛ **Solution:**

Vérification que H appartient bien d)

On a $x_H = 1 = 1 + t$ soit $t = 0$

Et avec $t = 0$ on a , $y = 2 \times 0 = 0 \neq y_H$

donc le point H n'est pas sur la droite (d) donc il n'est pas le projeté orthogonal de A sur (d) .

donc l'affirmation 4 est fausse.

Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.

☛ **Solution:**

Si un point M appartient sphère de centre O et rayon 1 alors $OM = 1$

On va vérifier qu'il existe deux valeurs de t telles que $OM_t = 1$ (rayon de la sphère)

Soit t un réel quelconque et $M_t(1+t; 2t; -t)$ le point de paramètre t sur la droite (d) .

$$OM_t = \sqrt{(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{1+2t+t^2+4t^2+t^2} = \sqrt{6t^2+2t+1}.$$

$$OM_t = 1$$

$$\iff \sqrt{6t^2+2t+1} = 1$$

$$\iff 6t^2+2t+1 = 1$$

$$\iff 6t^2+2t = 0$$

$$\iff 2t(3t+1) = 0$$

$$\iff 2t = 0 \text{ ou } 3t+1 = 0$$

$$\iff t = 0 \text{ ou } t = -\frac{1}{3}$$

Il existe donc deux valeurs de t , 0 et $-\frac{1}{3}$ telles que M_t appartienne sphère de centre O et rayon

donc l'affirmation 5 est vraie.





Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test de fabrication et un test de sécurité.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- ☐ 95% des jouets réussissent le test de fabrication ;
- ☐ Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98% réussissent le test de sécurité ;
- ☐ 1% des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- ☐ F l'évènement : "le jouet réussit le test de fabrication" ;
- ☐ S l'évènement : " le jouet réussit le test de sécurité ".

Puisqu'on choisit un jouet au hasard dans la production, on est en situation d'équiprobabilité, et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.

☛ **Solution:**

D'après l'énoncé 95% des jouets réussissent le test de fabrication donc $P(F) = 0,95$

et parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98% réussissent le test de sécurité, et

$P_F(S) = 0,98$.

$P(F) = 0,95 \text{ et } P_F(S) = 0,98.$

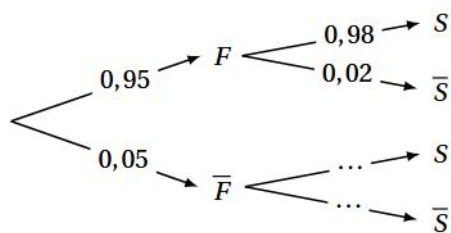
- 2a) Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.

☛ **Solution:**

On a $p(F)$ donc le premier niveau de l'arbre sera formé avec les événements F et $\overline{F}$.

Au deuxième niveau de l'arbre, on place les probabilités conditionnelles.





b) Montrer que $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = 0,2$.

☛ **Solution:**

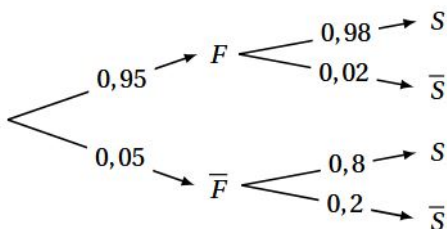
D'après l'énoncé 1% des jouets ne réussissent aucun des deux tests donc $p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,01$.

$$p(\bar{F} \cap \bar{S}) = p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(\bar{S})$$

$$\text{donc } 0,01 = 0,05 \times p_{\bar{F}}(\bar{S})$$

$$\text{donc } p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{0,01}{0,05} = \frac{1}{5} = 0,2$$

donc on a l'arbre suivant :



3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.

☛ **Solution:**

$$p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0,95 \times 0,98 = 0,931$$

La probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests est égale à 0,931.

4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.

☛ **Solution:**

$$\text{On a } F \cap \bar{F} = \emptyset \text{ et } F \cup \bar{F} = \Omega$$





donc les évènements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers Ω

donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(F \cap S) + p(\overline{F} \cap S) \\ &= p(F) \times p_F(S) + p_{\overline{F}} \times p(S) \\ &= 0,95 \times 0,98 + 0,05 \times 0,8 \\ &= 0,971 \end{aligned}$$

La probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut, 0,97 arrondi au centième.

5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

☛ **Solution:**

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,931}{0,971} \approx 0,9588$$

La probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication sachant qu'il a réussi le test de sécurité vaut environ 0,96.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95.

Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication.

On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n .

☛ **Solution:**

S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$

$$E(S_n) = n \times p = 0,95n \text{ et } V(X) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n.$$





2. Dans cette question, on pose $n = 150$.

- a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $p(S_{150} = 145)$.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

☛ **Solution:**

$$\begin{aligned} p(S_{150} = 145) &= \binom{150}{145} \times 0,95^{145} \times 0,05^{150-145} \\ &= 591\,600\,030 \times 0,95^{145} \times 0,05^5 \\ &= 0,10884 \\ &\approx 0,109 \end{aligned}$$

La probabilité que 145 jouets sur les 150 du lot réussissent le test de fabrication est environ 0,109

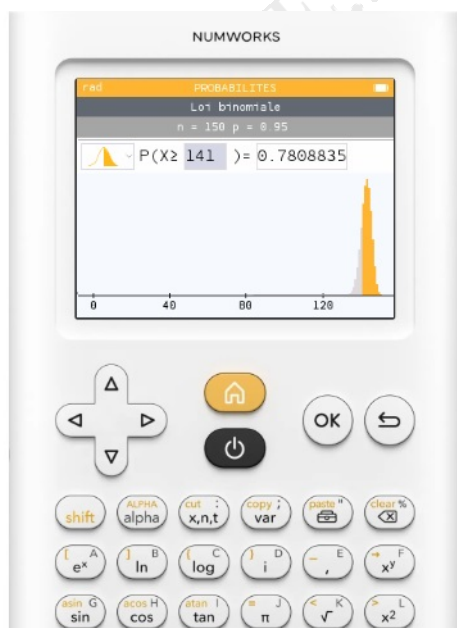
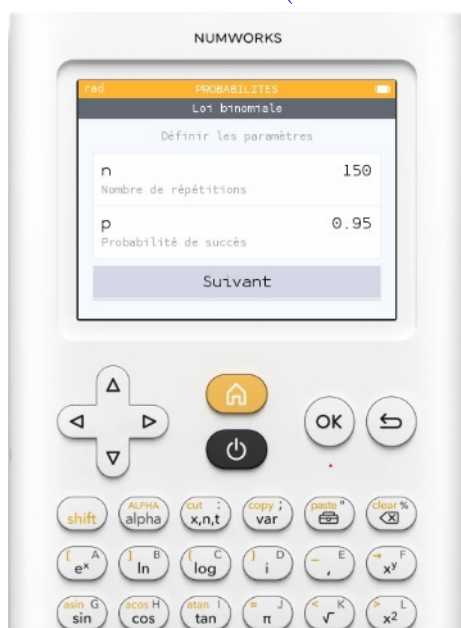
- b) Déterminer la probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication.

Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

☛ **Solution:**

94% des jouets de ce lot correspond à 141 jouets.

Avec la calculatrice (NUMWORKS)



$$p(S_{150} \geq 141) \approx 0,78088$$





La probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication vaut $0,781 \times 10^{-3}$

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \frac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.

On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n .

a) Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et que $V(F_n) = \frac{0,0475}{n}$.

☛ **Solution:**

D'après les propriétés sur l'espérance d'une somme de variables aléatoires :

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{0,95n}{n} = 0,95.$$

D'après les propriétés sur la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes :

$$V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{0,0475n}{n^2} = \frac{0,0475}{n}.$$

$$E(F_n) = 0,95 \text{ et } V(F_n) = \frac{0,0475}{n}.$$

b) On s'intéresse à l'évènement I suivant : "la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93% et 97%".

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

☛ **Solution:**

L'évènement $0,93 < F_n < 0,97$ soit $0,95 - 0,02 < F_n < 0,95 + 0,02$

On a donc $|F_n - 0,95| < 0,02$

On a donc $\delta = 0,02$ et donc avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

On a donc $\mu = E(F_n) = 0,95$ et $V(F_n) = \frac{0,0475}{n}$ et $p(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$

$$\text{soit ici } p(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq \frac{0,0475}{n \cdot 0,02^2}$$





$$\text{donc } p(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq \frac{0,0475}{0,02^2 n}$$

$$p(|F_n - 0,95| < 0,02) = 1 - p(|F_n - 0,95| \geq 0,02)$$

$$1 - p(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \geq 0,96$$

$$\Leftrightarrow -p(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \geq 0,96 - 1$$

$$\Leftrightarrow -p(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \geq -0,04$$

$$\Leftrightarrow p(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq 0,04$$

$$\text{On veut donc } \frac{0,0475}{0,02^2 n} \leq 0,04$$

$$\frac{0,0475}{0,02^2 n} \leq 0,04$$

$$\Leftrightarrow 0,0475 \leq 0,04 \times 0,02^2 n$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,0475}{0,04 \times 0,02^2} \leq n$$

$$\Leftrightarrow 2968,75 \leq n$$

et n est un entier

donc à partir de 2 969 jouets prélevés, la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

Exercice 3 (5 points) Suites



temps estim 5-50mn

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2 .

Solution:

En prenant $n = 1$ dans $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$, on a :





$$u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6.$$

$u_2 = 3,6$ donc après deux prises du médicament, le patient a 3,6 mL de médicament dans son organisme.

2. Montrer par récurrence que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ pour tout entier naturel n strictement positif.

☛ **Solution:**

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $P_n : u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$

□ Initialisation

$$P_1 : u_1 = 10 - 8 \times 0,8^{1-1} = 10 - 8 \times 1 = 2$$

or $u_1 = 2$, d'après l'énoncé.

donc P_1 est vérifiée

□ Hérité

Pour n entier naturel non nul, on suppose l'affirmation P_n vraie, soit $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$.

On veut montrer que l'affirmation P_{n+1} est vraie soit $u_{n+1} = 10 - 8 \times 0,8^{n+1-1} = 10 - 8 \times 0,8^n$.

$$u_{n+1} = 2 + 0,8u_n \text{ (énoncé)}$$

$$= 2 + 0,8(10 - 8 \times 0,8^{n-1}) \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$= 2 + 0,8 \times 10 - 0,8 \times 8 \times 0,8^{n-1}$$

$$= 2 + 8 - 8 \times 0,8^1 \times 0,8^{n-1}$$

$$= 10 - 8 \times 0,8^{n-1+1}$$

$$= 10 - 8 \times 0,8^n$$

donc P_{n+1} est vérifiée

On a donc montré par récurrence sur n que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ pour tout entier naturel n strictement positif.





3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

☛ **Solution:**

$$-1 < 0,8 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = 0$$

$$\text{et par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} -8 \times 0,8^{n-1} = 0.$$

$$\text{puis par somme des limites } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10 + 0 = 10.$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10.$$

Ceci signifie qu'après un très grand nombre de prises de ce médicament, l'organisme du patient contiendra une quantité de médicament proche de 10 mL.

4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions ?

Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.

☛ **Solution:**

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$8 \times 0,8^{n-1} > 0 \text{ donc } -8 \times 0,8^{n-1} < 0$$

$$\text{donc } 10 - 8 \times 0,8^{n-1} < 10 + 0$$

donc $u_n < 10$ pour tout entier naturel n strictement positif.

$$\text{donc } u_N \geq 10 \text{ n'admet pas de solution}$$

donc la quantité de médicament dans l'organisme de l'individu qui est toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises du médicament.

5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

Justifier votre démarche.

☛ **Solution:**

$$u_n > 9$$





$$\Leftrightarrow 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9$$

$$\Leftrightarrow -8 \times 0,8^{n-1} > -1$$

$$\Leftrightarrow 8 \times 0,8^{n-1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0,8^{n-1} < \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,8^{n-1}) < \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,8) < \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow n-1 > \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln(0,8)} \quad \text{!} \quad \text{L'inégalité change de sens puisque } \ln(0,8) < 0$$

$$\Leftrightarrow n > 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln(0,8)}$$

$$\Leftrightarrow n > 1 - \frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \quad (\text{rappel : } \ln\left(\frac{1}{8}\right) = \ln(1) - \ln(8) = -\ln(8))$$

$$\text{Or } 1 - \frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \approx 10,3 \text{ et } n \text{ entier naturel donc } n \geq 11$$

donc à partir de 11 prises du médicament, la quantité dans l'organisme du patient dépasse strictement les 9ml.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par :

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2

• **Solution:**

$$\text{On a } S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = 2,8.$$

$$\text{donc } S_2 = 2,8$$





2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif, $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$.

☛ Solution:

Pour tout entier naturel n strictement positif on a $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$

$$\begin{aligned} & u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= 10 - 8 \times 0,8^0 + 10 - 8 \times 0,8^1 + \dots + 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \text{ On a } n \text{ fois } 10 \text{ dans cette somme} \\ &= 10n - (8 \times 0,8^0 + 8 \times 0,8^1 + \dots + 8 \times 0,8^{n-1}) \end{aligned}$$

Si on pose (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_1 = 8$ et de raison $q = 0,8$, on a

$$w_n = 8 \times 0,8^{n-1}$$

$$\begin{aligned} & w_1 + w_2 + \dots + w_n \\ &= 8 \times 0,8^0 + 8 \times 0,8^1 + \dots + 8 \times 0,8^{n-1} \\ &= 8 \times \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} \\ &= 8 \times \frac{1 - 0,8^n}{0,2} \\ &= 40 \times (1 - 0,8^n) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= 10n - 40 \times (1 - 0,8^n) \\ &= 10n - 40 + 40 \times 0,8^n \end{aligned}$$

donc $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

☛ Solution:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \\ &= \frac{10n - 40 + 40 \times 0,8^n}{n} \\ &= 10 - \frac{40}{n} + \frac{40 \times 0,8^n}{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40}{n} &= 0 \end{aligned}$$





$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 40 \times 0,8^n = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\text{donc par quotient on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40 \times 0,8^n}{n} = 0$$

Par somme des limites, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 10$

La quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du patient tend elle aussi vers 10 ml.

4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```

1 def mystere(k) :
2     n = 1
3     s = 2
4     while s < k :
5         n = n + 1
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7     return n

```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie mystere(9) ?

☛ **Solution:**

La fonction mystère est une fonction de seuil : elle détermine l'indice seuil pour lequel la valeur de S_n franchit le seuil k pour la première fois.

Autrement dit, la boucle WHILE s'exécute tant que $S_n < k$

mystere(9) renvoie donc le premier nombre entier naturel non nul n pour lequel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme du patient depuis le début de la prise devient supérieure ou égale à 9 ml.

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

☛ **Solution:**

D'après la fin de la partie A, on a trouvé que la quantité dans le corps du patient dépasse les 9 ml à partir de la 11ième prise donc cette valeur est donc strictement supérieure à 10,





donc pour $n < 11$, les valeurs de la suite (u_n) sont donc toutes inférieures strictement à 9, et donc leur moyenne le sera aussi.

donc $S_n < 9$ pour tout entier naturel non nul n inférieur ou égal à 10.

La fonction mystère doit donc renvoyer un indice strictement supérieur à 10.

Remarque

Avec le MENU suite de la calculatrice, on a $S_{39} \approx 8,974$ et $S_{40} \approx 9,0001$

Exercice 4 (5 points) Fonction, limites et convexité | ★ | temps estim 0-45mn

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.

a) Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

☛ **Solution:**

On pose $u(x) = \sqrt{x}$ dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\text{et } u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

donc $g = e^u$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)e^{u(x)} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc $g'(x) = f(x)$

b) Pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$$

☛ **Solution:**





On a $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ et on pose $v(x) = 2\sqrt{x}$ dérivables sur $]0; +\infty[$

donc $f = \frac{g}{v}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\text{On a } v'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x)v(x) - g(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

donc on a bien $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$.

2a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

👉 **Solution:**

En posant $X = \sqrt{x}$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$$

donc par composition $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} = 0^+$$

donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

👉 **Solution:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.





3a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

☛ **Solution:**

D'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On pose $X = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

donc par composition de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty$

$$\text{et on a } f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

☛ **Solution:**

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $\sqrt{x} - 1$.

$$\sqrt{x} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

donc $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$

On a donc :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e}{2}$	$+\infty$

$$f(1) = \frac{e^{\sqrt{1}}}{2\sqrt{1}} = \frac{e}{2}$$





- c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

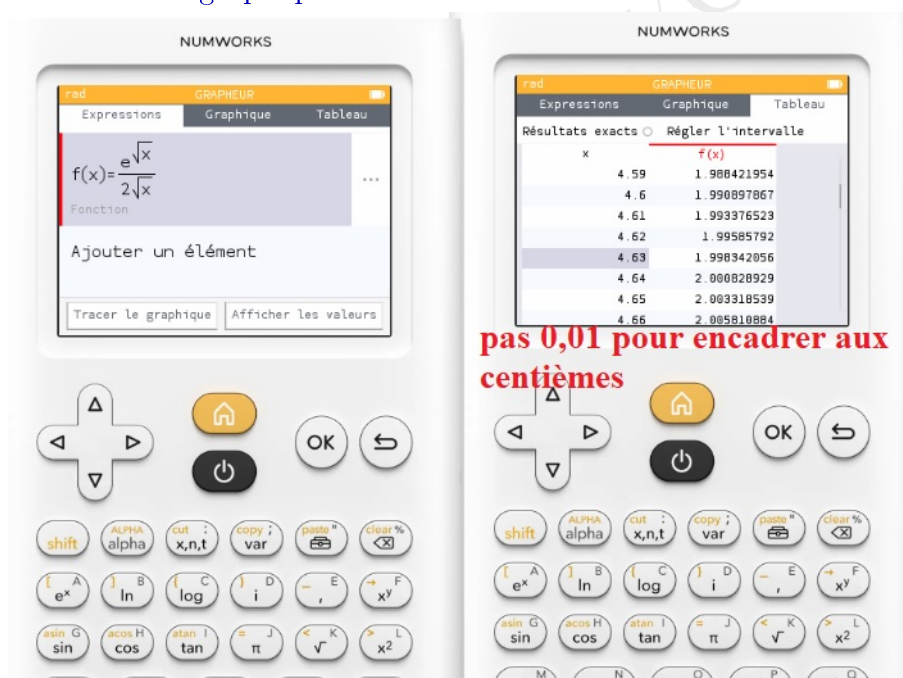
☛ **Solution:**

La fonction f est continue(car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

2 est compris entre $\frac{e}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α dans $[1; +\infty[$.

Avec le menu graphique de la calculatrice :



On a alors $f(4,63) \approx 1,998$ et $f(4,64) \approx 2,001$

donc $4,63 < \alpha < 4,64$ ⚠ pour arrondir aux dixièmes, il faut un encadrement aux centièmes

soit $\alpha \approx 4,6$

donc $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $]1; +\infty[$ avec $\alpha \approx 4,6$

4. On pose $I = \int_1^2 f(x)dx$.

- a) Calculer I .





☛ **Solution:**

D'après la question 1, on a $g'(x) = f(x)$ sur $]0; +\infty[$

donc g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

$$g(2) = e^{\sqrt{2}} \text{ et } g(1) = e^{\sqrt{1}} = e.$$

$$I = \int_1^2 f(x) dx$$

$$= [g(x)]_1^2$$

$$= g(2) - g(1)$$

$$= e^{\sqrt{2}} - e$$

donc $I = e^{\sqrt{2}} - e$

b) Interpréter graphiquement le résultat.

☛ **Solution:**

Sur $[1; 2]$, f est continue (car dérivable) et positive (puisque le minimum est $f(1) > 0$)

donc l'aire, en unités d'aires, du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est $I = \int_1^2 f(x) dx$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$$

a) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

☛ **Solution:**

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose $X = \sqrt{x}$ et donc $X^2 = x$ et $X \in]0; +\infty[$

$$x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3.$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$$

donc pour tout $X \in]0; +\infty[$, $X^2 - 3X + 3 > 0$ (signe de $a = 1$ coefficient de X^2)

donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.





b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

☛ **Solution:**

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$

donc $f''(x) > 0$.

donc la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

