



Exercice 1 (6 points) Probabilités



temps estim 5-40mn

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- ☐ soit "total" : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- ☐ soit "partiel" : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.

Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30% des cas.

Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85% des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.

On considère les événements suivants :

- ☐ T : " Le contrôle est un contrôle total " ;
- ☐ E : " Une erreur est détectée lors du contrôle ".

On notera $\bar{T}$ et $\bar{E}$ les événements contraires de T et E .

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $p(\bar{T} \cap E)$.

☛ **Solution:**

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total

$$\text{donc } p(T) = \frac{1}{10} = 0,1$$

Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30% des cas

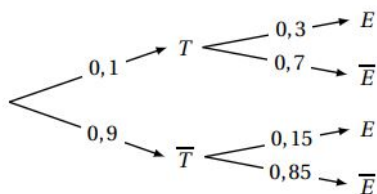
$$\text{donc } p_T(E) = 0,3$$





Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85% des cas, il n'y a pas d'erreur donc $p_{\bar{T}}(\bar{E}) =$

0,85



$$p(\bar{T} \cap E) = p(\bar{T}) \times p_{\bar{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135$$

La probabilité que le contrôle soit partiel et avec une erreur est $p(\bar{T} \cap E) = 0,135$

2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.

☛ **Solution:**

$$T \cap \bar{T} = \emptyset \text{ et } T \cup \bar{T} = \Omega$$

donc T et $\bar{T}$ forment une partition de l'univers et d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T \cap E) + P(\bar{T} \cap E)$$

$$= 0,1 \times 0,3 + 0,135$$

$$= 0,165$$

La probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle est égale à 0,165.

3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. (On donnera la valeur arrondie au centième)

☛ **Solution:**

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{0,1 \times 0,3}{0,165}$$

$$\approx 0,1818.$$

La probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée vaut environ 0,18.





Partie B :

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

☛ **Solution:**

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$

donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,165$.

Remarque

On répète de manière indépendante 15 épreuves de Bernoulli et la probabilité de succès (il y a une erreur) est $p(S) = 0,165$

2. Déterminer la probabilité qu'exactly 5 erreurs soient détectées. (On donnera la valeur arrondie au centième)

☛ **Solution:**

$$\begin{aligned} p(X=5) &= \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{15-5} \\ &= 3003 \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \\ &\approx 0,0605 \end{aligned}$$

La probabilité qu'exactly 5 erreurs soient détectées vaut environ 0,06 (arrondie aux centièmes)

3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. (On donnera la valeur arrondie au centième)





☛ **Solution:**

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - 0,835^{15} \\ &\approx 0,9331. \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée vaut 0,93 (arrondie aux centièmes)

4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99%.

Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

☛ **Solution:**

Soit n le nombre de contrôles effectués chaque jour.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

On a alors cette fois Y qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

On souhaite que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

On veut donc que $1 - 0,835^n \geq 0,99$.

$$1 - 0,835^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow -0,835^n \geq -0,01$$

$$\Leftrightarrow 0,835^n \leq 0,01 \quad \triangle \quad \text{l'inégalité change de sens en multipliant par } -1$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,835^n) \leq \ln(0,01) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0 ; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,835) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \quad \text{L'inégalité change de sens car } \ln(0,835) < 0$$

$$\text{or } \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5 \text{ et } n \in \mathbb{N}$$





donc $n \geq 26$

donc Il faut déclencher au moins 26 contrôles chaque jour.

Partie C :

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1 .

☛ **Solution:**

X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$.

$$\text{donc } E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$$

$$\text{et } V(X_1) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555$$

$$\text{donc } E(X_1) = 3,3 \text{ et } V(X_1) = 2,7555$$

2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Justifier que $E(S) = 9,9$ et que $V(S) = 8,2665$.

Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.

à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.

☛ **Solution:**

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ &= 3 \times E(X_1) \end{aligned}$$





$$= 3 \times 3,3$$

$$= 9,9$$

Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes donc :

$$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3)$$

$$= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$$

$$= 3 \times V(X_1)$$

$$= 3 \times 2,7555$$

$$= 8,2665$$

$$E(S) = 9,9 \text{ et } V(S) = 8,2665$$

$$6 < S < 14 \iff 10 - 4 < S < 10 + 4 \text{ soit } |S - 10| < 4$$

$$p(|S - 10| < 4) = 1 - p(|S - 10| \geq 4)$$

Or, pour tout réel $\sigma > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$p(|S - E(S)| \geq \sigma) \leq \frac{V(S)}{\sigma^2}$$

On a ici $E(S) \approx 10$ (consigne) et $V(S) = 8,2665$ et $\sigma = 4$

$$p(|S - 10| \geq 4) \leq \frac{8,2665}{4^2}.$$

$$\iff -p(|S - 10| \geq 4) \geq -\frac{8,2665}{4^2}.$$

$$\iff 1 - p(|S - 10| \geq 4) \geq 1 - \frac{8,2665}{4^2}.$$

$$\text{donc } p(|S - 10| < 4) \geq 1 - \frac{8,2665}{16}$$

$$\text{Or } 1 - \frac{8,2665}{16} \approx 0,4833 \text{ et } 0,4833 > 0,48$$

donc la probabilité que le nombre d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.

Exercice 2 (4 points) Géométrie dans l'espace



temps estim 0-40mn

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.





Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

Dans tout l'exercice, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère :

❑ les points $A(-3; 1; 4)$ et $B(1; 5; 2)$

❑ le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $4x + 4y - 2z + 3 = 0$

❑ la droite (d) dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 1 \\ z = 9 - 5t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

1. Les droites (AB) et (d) sont :

- a) sécantes non perpendiculaires.
- b) perpendiculaires.
- c) non coplanaires.
- d) parallèles.

🐞 **Solution:**

- Vérification des droites parallèles

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$x_{\overrightarrow{AB}} = \frac{4}{3} \times 3 = \frac{4}{3} x_{\vec{u}}$$

$$\text{mais } \frac{4}{3} y_{\vec{u}} \neq y_{\overrightarrow{AB}}$$

donc il n'existe pas de réel k tel que $k\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.





- Vérification des droites perpendiculaires

Le repère est orthonormé.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 4 \times 3 + 4 \times 0 - 2 \times (-5) = 22 \neq 0$$

donc les droites (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

- Vérification des droites sécantes (donc coplanaires) ou non coplanaires

Une équation paramétrique de la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et passant par le point $A(-3; 1; 4)$ est :

$$\begin{cases} x = -3 + 4s \\ y = 1 + 4s \\ z = 4 - 2s \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R}.$$

Les deux droites sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -3 + 4s = -6 + 3t \\ 1 + 4s = 1 \\ 4 - 2s = 9 - 5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4s - 3t = -3 \\ s = 0 \\ s - 5t = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t = -3 \\ s = 0 \\ -5t = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites sont sécantes.

Réponse a

2. La droite (AB) est :

- a) incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
- b) strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.
- c) sécante et non orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
- d) orthogonale au plan $\mathcal{P}$.





☛ **Solution:**

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$

donc la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Réponse d

3. On considère le plan P' d'équation cartésienne $2x + y + 6z + 5 = 0$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont :

- a) sécants et non perpendiculaires.
- b) perpendiculaires.
- c) confondus.
- d) strictement parallèles.

☛ **Solution:**

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$ est $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 4 \times 2 + 4 \times 1 - 2 \times (-6) = 8 + 4 - 12 = 0$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans sont perpendiculaires.

Réponse b

4. On considère le point $C(0 ; 1 ; -1)$. La valeur de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré est :

- a) 90 degrés
- b) 51 degrés
- c) 39 degrés
- d) 0 degrés

☛ **Solution:**





$$\text{On a : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 4 + 0 \times 4 - 5 \times (-2) = 22$$

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC})$$

$$\Leftrightarrow 22 = 6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{22}{6\sqrt{34}}$$

D'où $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{22}{6\sqrt{34}}\right) \approx 51$ degrés  en vifier que la calculatrice est réglée sur "degrés"

Réponse b.

Exercice 3 (6 points) Fonction ln, TVI et suites



temps estim 5-55mn

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1 .

 **Solution:**

On pose $X = x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} X = \lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$$

$$\text{donc par composition } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$$

$$\text{On a aussi } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x^2}{25} = -\frac{1}{25}$$

$$\text{donc par somme } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$





2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$

☛ Solution:

On pose $u(x) = x + 1$ dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ et $u'(x) = 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} \\ &= \frac{25 \times 4}{25(x+1)} - \frac{2(x+1)x}{25(x+1)} \\ &= \frac{100 - 2(x+1)x}{25(x+1)} \\ &= \frac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)} \end{aligned}$$

donc $f'(x) = \frac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)}$

3. étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6, 5]$.

☛ Solution:

Sur $] -1 ; +\infty[$, on a $25(x+1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur $100 - 2x - 2x^2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 100 \times (-2) = 804 > 0$$

$100 - 2x - 2x^2$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{804}}{2(-2)} = \frac{2 - 2\sqrt{201}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,6$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{804}}{2(-2)} = \frac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1$$

donc $x_2 \notin] -1 ; +\infty[$

$100 - 2x - 2x^2$ est du signe de $a = -2$ coefficient de x^2 à "l'extérieur" des racines

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-1	x_1	$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	-
variations de f		$f(x_1)$	

$[2 ; 6, 5] \subset] -1 ; x_1[$ donc f est strictement croissante sur $[2 ; 6, 5]$.



Remarque

On ne demandait pas la limite en $+\infty$ dans les questions précédentes

4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2,364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2,265$	$h(6,5)$

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2 ; 6,5]$.

☛ **Solution:**

$$h(2) = f(2) - 2 = 4\ln(2+1) - \frac{2^2}{25} - 2 \approx 2,23.$$

$$h(6,5) = 4\ln(6,5+1) - \frac{6,5^2}{25} - 6,5 \approx -0,13$$

f est dérivable donc continue sur $[2 ; 6,5]$ et donc par somme h est continue sur $[2 ; 6,5]$

Sur l'intervalle $[2 ; m]$ la fonction h est strictement croissante, or $h(2) > 0$ donc sur $[2 ; m]$, $h(x) > 0$ et l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[m ; 6,5]$, la fonction h est strictement décroissante et continue et 0 est compris entre $h(m) = M \approx 2,265$ et $h(6,5) \approx -0,13$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[m ; 6,5]$.

donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :





```
from math import *  
  
def f(x):  
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25  
  
def bornes(n):  
    p = 1/10**n  
    x = 6  
    while f(x)-x > 0:  
        x = x + p  
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- ❑ la commande $\log(x)$ renvoie la valeur $\ln x$;
- ❑ la commande $c**d$ renvoie la valeur de c^d .

a) Donner les valeurs renvoyées par la commande bornes(2).

On donnera les valeurs arrondies au centième.

👉 **Solution:**

En utilisant le tableau de valeurs de la fonction h sur $[2; 6,5]$ avec un pas de 0,01 on obtient $h(6,36) > 0$ et $h(6,37) < 0$

donc $6,36 < \alpha < 6,37$

Dans l'algorithme on a alors $n = 2$ donc $p = \frac{1}{10^2} = 0,01$

On parcourt donc le tableau de valeurs de h avec un pas de 0,01 (puisque $x = x + p$ dans la boucle) et on recherche à partir de quelle valeur de x on a $h(x) - x < 0$

donc l'algorithme renvoie un encadrement de α d'amplitude 0,01

L'algorithme renvoie les valeurs (6,36; 6,37)

b) Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

👉 **Solution:**

Dans le contexte de l'exercice, un encadrement de α est $6,36 < \alpha < 6,37$.





Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $2 \leq u_n < u_{n+1} < 6,5$.

☛ Solution:

Pour tout n entier naturel, on note P_n la propriété $2 \leq u_n < u_{n+1} < 6,5$

- Initialisation

On a $u_0 = 2$,

$$u_1 = f(u_0) = f(2) \approx 4,23$$

$$\text{Donc } 2 \leq u_0 < u_1 < 6,5$$

donc pour $n = 0$, l'affirmation P_0 est vraie.

- Hérédité

Soit n naturel, tel que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire $2 \leq u_n < u_{n+1} < 6,5$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie soit $2 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 6,5$

$2 \leq u_n < u_{n+1} < 6,5$ et la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$

$$\text{donc } f(2) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(6,5)$$

$$\text{or } f(2) \approx 4,23 > 2 \text{ et } f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$$

$$\text{donc } 2 < f(2) \leq u_{n+1} < u_{n+2} < f(6,5) < 6,5$$

donc P_{n+1} est vraie

On a donc montré par récurrence que pour tout n entier naturel, $2 \leq u_n < u_{n+1} < 6,5$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .

☛ Solution:

Pour tout n entier naturel, $2 \leq u_n < u_{n+1} < 6,5$ donc la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par $6,5$





donc la suite (u_n) est convergente.

3. On rappelle que le réel α , défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2 ; 6, 5]$.

Justifier que $\ell = \alpha$.

☛ **Solution:**

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff h(x) = 0$

On sait de plus que cette limite appartient à l'intervalle $[2 ; 6, 5]$ et que sur cette intervalle l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α , on a donc $\ell = \alpha$.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ avec $\alpha \in]6, 36; 6, 37[$.

Exercice 4 (4 points) équations différentielles



temps estim 5-45mn

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.

Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .

☛ **Solution:**

h est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $h'(t) = 0$

$$h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{48}{12000} = \frac{1}{250}$$

donc h est une solution de (E_1)





2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.

☛ **Solution:**

$$y' + 0,48y = 0 \iff y' = -0,48y$$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$ sont les fonctions $f(t) = Ce^{-0,48t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

☛ **Solution:**

Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont donc les fonctions de la forme

$$y(t) = f(t) + h(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

à un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 3 0000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure.

On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(E_2) : p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$.

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

☛ **Solution:**

p est solution de l'équation différentielle (E_2) donc $p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$

$$\text{Or } p = \frac{1}{y} \text{ et } p' = \frac{-y'}{y^2}$$





$$\begin{aligned}
 p' &= \frac{1}{250}p \times (120 - p) \\
 \text{donc } \frac{-y'}{y^2} &= \frac{1}{250} \frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y}\right) \\
 \Rightarrow -y' &= y^2 \times \frac{1}{250y} \times \frac{120y - 1}{y} \\
 \Rightarrow -y' &= \frac{1}{250} \times (120y - 1) \\
 \Rightarrow -y' &= 0,48y - \frac{1}{250} \\
 \Rightarrow y' + 0,48y &= \frac{1}{250}
 \end{aligned}$$

Donc y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1) , alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2) .

Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + Ke^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ constante réelle.}$$

☛ **Solution:**

y est de la forme $y(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{1}{y(t)} \\
 &= \frac{1}{Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{\frac{120Ce^{-0,48t} + 1}{120}} \\
 &= \frac{120}{120Ce^{-0,48t} + 1} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{120} \times (120Ce^{-0,48t} + 1)} \\
 &= \frac{120}{Ke^{-0,48t} + 1} \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ en posant } K = 120C
 \end{aligned}$$

donc $p(t) = \frac{120}{Ke^{-0,48t} + 1}$ avec $K \in \mathbb{R}$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K .

☛ **Solution:**





On sait que $p(0) = 30$ donc $\frac{120}{Ke^0 + 1} = 30$

$$\frac{120}{Ke^0 + 1} = 30$$

$$\Leftrightarrow Ke^0 + 1 = \frac{120}{30}$$

$$\Leftrightarrow Ke^0 = \frac{120}{30} - 1$$

$$\text{donc } K = \frac{120}{30} - 1 = 3.$$

4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

☛ **Solution:**

On pose $T = -0,48t$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T = \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,48t = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$$

$$\text{donc par composition, } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0$$

$$\text{et par produit et somme, } \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + 3e^{-0,48t} = 1$$

$$\text{puis par quotient, } \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120.$$

Dans le contexte de l'exercice la population de la bactérie se stabilisera vers 120 000.

5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

☛ **Solution:**

$$p(t) = 60 \Leftrightarrow \frac{120}{3e^{-0,48t} + 1} = 60$$

$$\Leftrightarrow 120 = 60 \times (3e^{-0,48t} + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3e^{-0,48t} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = e^{-0,48t}$$

$$\Leftrightarrow -0,48t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(3)}{0,48}$$





soit $t \approx 2,289$

2,289 heures correspond à 2h et 0,289 heures soit $0,289 \times 60 \approx 17$ mn

Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus est de 2 heures et 17 minutes en

