réf 1699 sujet BAC première spé maths prévisionnel

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question.

Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

1. L'inverse du double de 5 est égal à :

a. $\dfrac{2}{5}$ b. $\dfrac{1}{10}$ c. $\dfrac{5}{2}$ d. 10

☛ **Solution**:

$$\frac{1}{2\times 5}=\frac{1}{10}$$

$\boxed{\text{Réponse b}}$

2. On considère la relation $F = a+\dfrac{b}{cd}$

Lorsque $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$, $c=4$, et $d=-\dfrac{1}{4}$, la valeur de F est égale à :

a. $-\dfrac{5}{2}$ b. $-\dfrac{3}{2}$ c. $\dfrac{5}{2}$ d. $\dfrac{3}{2}$

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned}F&=\frac{1}{2}+\frac{3}{4\times\dfrac{-1}{4}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{3}{-1}\\&=\frac{1}{2}-3\\&=\frac{1}{2}-\frac{6}{2}\\&=\frac{-5}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Réponse a}}$

3. Le prix d'un article est multiplié par 0,975.

Cela signifie que le prix de cet article a connu :

a. une baisse de $2,5\%$ b. une augmentation de $97,5\%$

c. une baisse de 25% d. une augmentation de 0,975%

Solution:

On applique le coefficient multiplicateur $k = 0,97$ avec $k < 1$ donc il s'agit d'une baisse

$1 - \dfrac{t}{100} = 0,975$ donc $t = (0,975 - 1) \times 100 = -2,5\%$

$\boxed{\text{Réponse a.}}$

4. Le prix d'un article est noté P avec $P \neq 0$.

Ce prix augmente de 10% puis baisse de 10%.

À l'issue de ces deux variations, le nouveau prix est noté P_1. On peut affirmer que :

a. $P_1 = P$ b. $P_1 > P$ c. $P_1 < P$ d. Cela dépend de P

Solution:

Appliquer une hausse de 10% revient à appliquer le coefficient multiplicateur $1 + \dfrac{10}{100} = 1,1$

Appliquer une baisse de 10% revient à appliquer le coefficient multiplicateur $1 - \dfrac{10}{100} = 0,9$

On a donc $P_1 = P \times 1,1 \times 0,9 = P \times 0,99$

On multiplie finalement P par un coefficient strictement inférieur à 1 donc $P_1 < P$

$\boxed{\text{Réponse c.}}$

5. On lance un dé à 4 faces.

La probabilité d'obtenir chacune des faces est donnée dans le tableau ci-dessous :

Face numéro 1	Face numéro 2	Face numéro 3	Face numéro 4
$0,5$	$\dfrac{1}{6}$	$0,2$	x

On peut affirmer que :

a. $x = \dfrac{2}{15}$ b. $x = \dfrac{2}{3}$ c. $x = 0,4$ d. $x = 0,1$

Solution:

$0,5+\dfrac{1}{6}+0,2+x=1$
$\iff \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}+x=1$
$\iff \dfrac{15}{30}+\dfrac{5}{30}+\dfrac{6}{30}+x=1$
$\iff \dfrac{26}{30}+x=1$
$\iff \dfrac{13}{15}+x=1$
$\iff x=1-\dfrac{13}{15}$
$\iff x=\dfrac{15}{15}-\dfrac{13}{15}$
$\iff x=\dfrac{2}{15}$

Réponse a

6. On considère x, y, u des réels non nuls tels que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{u}$.

On peut affirmer que :

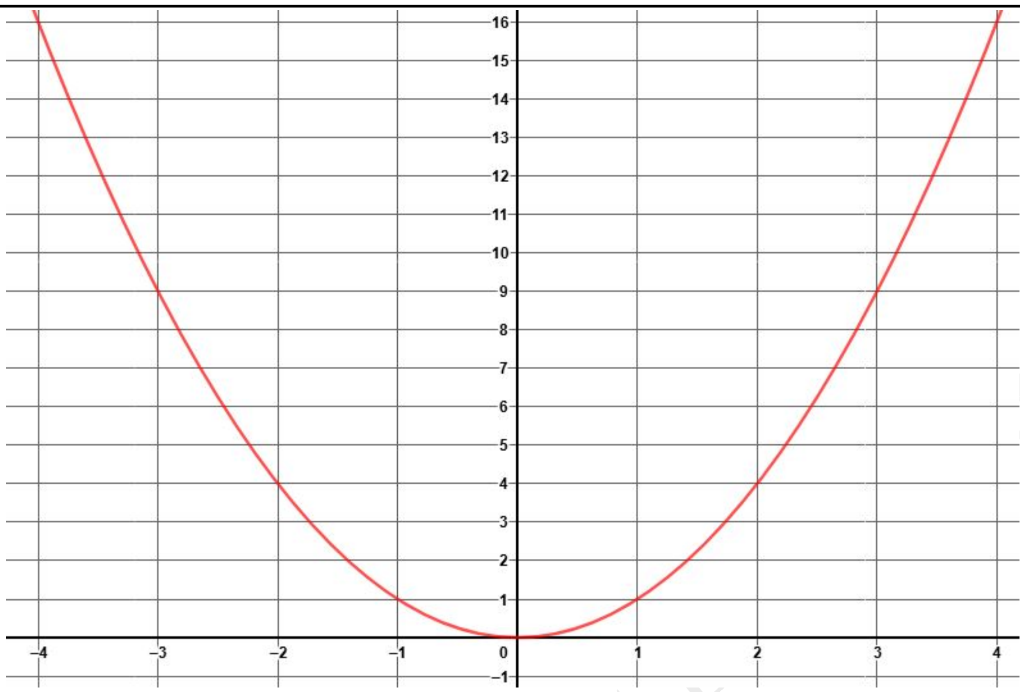
a. $u=\dfrac{xy}{x+y}$ b. $u=\dfrac{x+y}{xy}$ c. $u=xy$ d. $u=x+y$

☛ **Solution**:

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{u}$
$\iff \dfrac{y}{xy}+\dfrac{x}{xy}=\dfrac{1}{u}$
$\iff \dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{1}{u}$
$\iff \dfrac{xy}{x+y}=u$

Réponse a.

7. On a représenté ci-dessous la parabole d'équation $y=x^2$.



On note $(\mathcal{J})$ l'inéquation, sur $\mathbb{R}$: $x^2 \geq 10$.

L'inéquation $(\mathcal{J})$ est équivalente à :

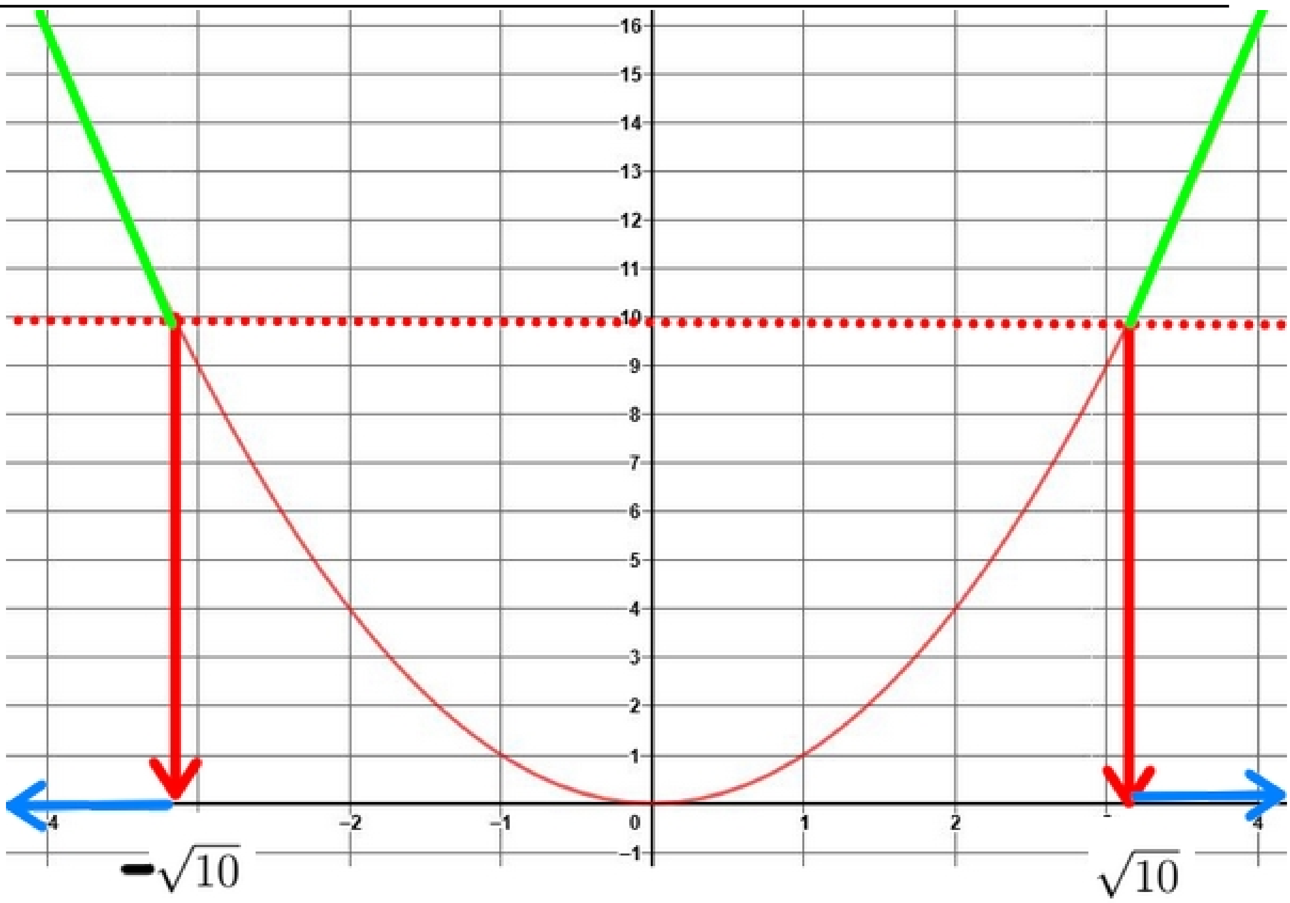
a. $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ b. $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$ c. $x \geq \sqrt{10}$ d. $x = \sqrt{10}$ ou $x = -\sqrt{10}$

☛ **Solution**:

Graphiquement :

Les antécédents de 10 par la fonction carré sont $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$

Les solutions de $x^2 \geq 10$ sont les abscisses(en bleu) des points de la courbe(en vert) dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 10



donc $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$

Par le calcul :

$x^2 \geq 10$

$\iff x^2 - 10 \geq 0$

Les deux racines sont $x_1 = -\sqrt{10}$ et $x_2 = \sqrt{10}$

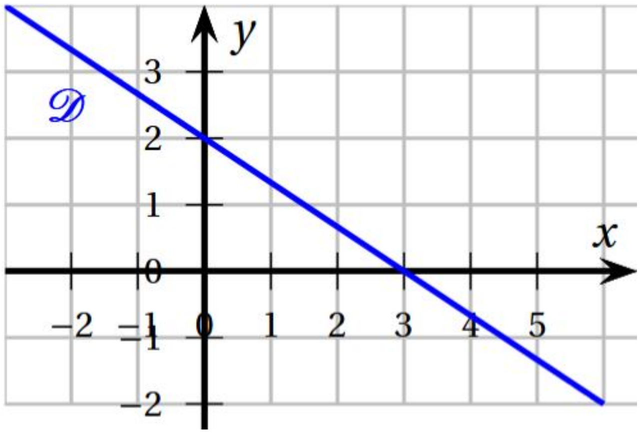
On a donc

x	$-\infty$ $-\sqrt{10}$ $\sqrt{10}$ $+\infty$
$x^2 - 10$	$+$ 0 $-$ 0 $+$ signe de a=1 signe de −a=− 1 signe de a= 1

donc on a $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$

Réponse b.

8. On a représenté ci-dessous une droite $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé.



Une équation de la droite $\mathcal{D}$ est :

a. $y=-\dfrac{3}{2}x+2$ b. $y=\dfrac{2}{3}x+2$ c. $2x-3y-6=0$ d. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}-1=0$

☛ **Solution**:

$A(0,2)$ et $B(3;0)$ appartiennent à $\mathcal{D}$

$y=-\dfrac{3}{2}\times 3+2=-4,5+2=-2,5\neq y_B$

$y=\dfrac{2}{3}\times 3+2=2+2=4\neq y_B$

$2\times 0-3\times 2-6=-12\neq 0$

$\dfrac{0}{3}+\dfrac{2}{2}-1=1-1=0$ et $\dfrac{3}{3}+\dfrac{0}{2}-1=1-1=0$

donc les coordonnées de A et B vérifient l'équation d

$\boxed{\text{Réponse d.}}$

9. On considère trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$f_1 : x \longmapsto x^2-(1-x)^2$, $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x}{2}-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f_3 : x \longmapsto \dfrac{5-\dfrac{2}{3}x}{0,7}$

Parmi ces trois fonctions, celles qui sont des fonctions affines sont :

a.aucune b. toutes c. uniquement la fonction f_1 d. uniquement les fonction f_2 et f_3

☛ **Solution**:

$f_1(x)=x^2-(1-x)^2=x^2-(1-2x+x^2)=2x-1$ (affine)

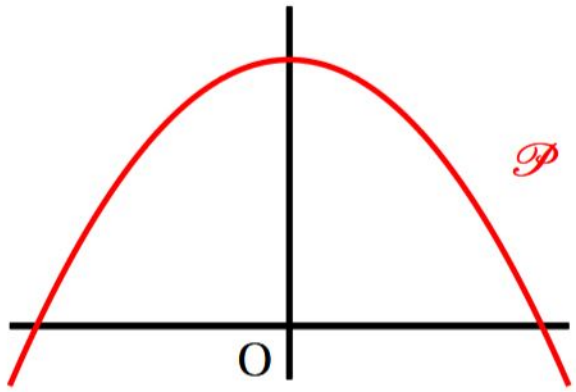
$f_2(x)=\dfrac{x}{2}-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}x-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (affine)

MATHS-LYCEE.FR –Première spécialité sujet prévisionnel BAC 2025

$$f_3(x) = \frac{5 - \frac{2}{3}x}{0,7} = \frac{5}{0,7} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{0,7}x = \frac{5}{0,7} - \frac{2}{2,1}x \text{ (affine)}$$

Réponse b.

10. On a représenté ci-dessous une parabole $\mathcal{P}$.



Une seule des quatre fonctions ci-dessous est susceptible d'être représentée par la parabole $\mathcal{P}$.

Laquelle ?

a. $x \longmapsto x^2 - 10$ b. $x \longmapsto -x^2 - 10$ c.$x \longmapsto -x^2 + 10$ d. $x \longmapsto -x^2 + 10x$

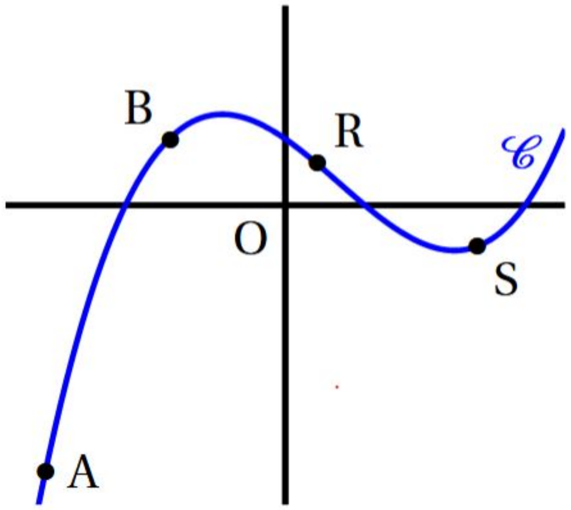
☛ **Solution**:

La parabole est à "l'envers" donc le coefficient a de x^2 est négatif donc réponse a fausse

L'image de 0 par la fonction est strictement positif donc $c > 0$ ce qui correspond à la réponse c

Réponse c.

11. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f.



Les points A, B, R et S appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$.

Leurs abscisses sont notées respectivement x_A, x_B, x_R et x_S.

L'inéquation $x \times f(x) > 0$ est vérifiée par :

a. x_A et x_B b. x_A et x_R c.x_A et x_S d. x_A, x_B et x_S

Solution:

Pour A : $x_A < 0$ et $f(x_A) < 0$ soit $x_A f(x_A) > 0$

Pour B : $x_B < 0$ et $f(x_B) > 0$ soit $x_B f(x_B) < 0$

Pour R : $x_R > 0$ et $f(x_R) > 0$ soit $x_R f(x_R) > 0$

Pour S : $x_S > 0$ et $f(x_S) < 0$ soit $x_S f(x_S) < 0$

Réponse b.

12. Voici une série de notes avec les coefficients associés.

Note	10	8	16
Coefficient	1	2	x

On note m la moyenne de cette série.

Que doit valoir x pour que $m = 15$?

a. impossible b. $x = 10^{-3}$ c. $x = 3$ d. $x = 19$

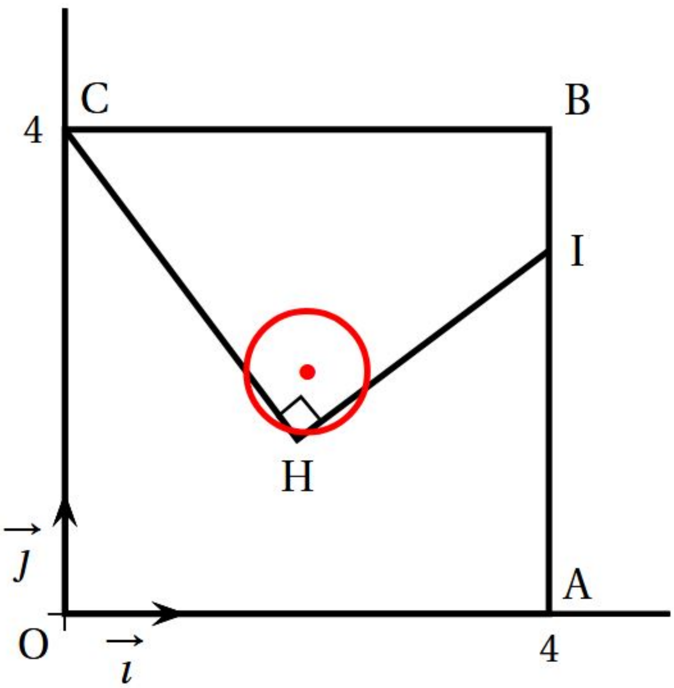
☛ **Solution**:

$$m = \frac{1\times 10 + 2\times 8 + x\times 16}{1+2+x} = 15$$
$$\Longleftrightarrow \frac{26+16x}{3+x} = 15$$
$$\Longleftrightarrow 26+16x = 15(3+x)$$
$$\Longleftrightarrow 26+16x = 45+15x$$
$$\Longleftrightarrow x = 45-26 = 19$$

Réponse d.

Exercice 2 (6 points) Produit scalaire et équation de cercle | ★★ | temps estimé:30-35mn

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère $OABC$ est un carré de côté 4;
- On a $A(4\ ;\ 0)$, $B(4\ ;\ 4)$, $C(0\ ;\ 4)$, $I(4\ ;\ 3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI);

❏ On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2\ ;\ 2)$ et de rayon $0,5$.

1.a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC}$.

Solution:

On a $O(0;0)$

$$\begin{cases} x_I - x_O = 4 - 0 = 4 \\ y_I - y_O = 3 - 0 = 3 \end{cases}$$

et $\begin{cases} x_C - x_O = 0 - 0 = 0 \\ y_C - y_O = 4 - 0 = 4 \end{cases}$

$$\boxed{\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}}$$

b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC}$.

Solution:

$\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC}$

$= x_{\overrightarrow{OI}}x_{\overrightarrow{OC}} + y_{\overrightarrow{OI}}y_{\overrightarrow{OC}}$

$= 4\times 0 + 3\times 4 = 12$

$$\boxed{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC} = 4\times 0 + 3\times 4 = 12}$$

2.a) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI.

Solution:

H est le projeté orthogonal de C sur (OI)

et l'angle $\widehat{IOC}$ est aigu

$$\boxed{\text{donc } \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC} = OI\times OH}$$

b) Calculer la longueur OI.

Solution:

$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{donc } OI=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5}$

c) En déduire que $OH=2,4$.

Solution:

On a $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC}=OI\times OH=5OH$

et $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC}=12$

donc $5OH=12\Longleftrightarrow OH=\dfrac{12}{5}=\dfrac{24}{10}=2,4$

$\boxed{OH=2,4}$

3.a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH).

Solution:

On a $(OI)\perp(CH)$ donc $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (CH)

Soit $M(x;y)$ un point de (CH)

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-0\\y-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{OI}=0$

$\Longleftrightarrow x\times 4+(y-4)\times 3=0$

$\Longleftrightarrow 4x+3y-12=0$

$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (CH) \text{ est } 4x+3y-12=0}$

Remarque

Autre méthode Un vecteur normal à la droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (CH) donc $a=4$ et $b=3$

(CH) : $4x+3y+c=0$

$C(0;4)\in(CH)$ donc $4\times 0+3\times 4+c=0$ soit $c=-12$

donc (CH) : $4x+3y-12=0$

b) Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est : $x^2+y^2-4x-4y+7,75=0$.

☛ **Solution**:

$\mathcal{E}$ a pour centre centre $D(2\ ;\ 2)$ et rayon $0,5$

donc admet pour équation $(x-2)^2+(y-2)^2=0,5^2$

$(x-2)^2+(y-2)^2=0,5^2$

$\Longleftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4=0,25$

$\Longleftrightarrow x^2-4x+y^2-4y+8-0,25=0$

$\Longleftrightarrow x^2-4x+y^2-4y+7,75=0$

$\boxed{\text{donc une équation de } \mathcal{E} \text{ est } x^2-4x+y^2-4y+7,75=0}$

c) Le point $M(1,5\ ;\ 2)$ appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

☛ **Solution**:

(CH) : $4x+3y-12=0$

$4x_M+3y_M-12=4\times 1,5+3\times 2-12=6+6-12=0$ donc $M\in(CH)$

$\mathcal{E}$: $x^2-4x+y^2-4y+7,75=0$

$x_M^2-4x_M+y_M^2-4y_M+7,75$

$=1,5^2-4\times 1,5+2^2-4\times 2+7,75$

$=2,25-6+4-8+7,75$

$=10-10$

$=0$

donc $M\in\mathcal{E}$

$\boxed{\text{donc } M \text{ est bien un point d'intersection de } (CH) \text{ et de } \mathcal{E}}$

Aide au calcul :
$0{,}5^2 = 0{,}25$
$1{,}5^2 = 2{,}25$
$2{,}5^2 = 6{,}25$
$5 \times 2{,}4 = 12$

Exercice 3 (8 points) Étude de fonction et suites | ★★ | temps estimé:40-45mn

On se place dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ orthogonal.

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2 - 5x + 4$.

On note $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction g.

a) Étudier le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

☛ **Solution**:

On peut remarquer que $1^2 - 5 + 4 = 0$ donc que $x_1 = 1$ est une racine.

On a $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $x_2 = \dfrac{4}{1} = 4$

Le coefficient a de x^2 est positif $(a = 1)$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
signe de g		+ signe de a	0	−	0	+ signe a	

b) On considère un entier naturel n quelconque.

On note A_n le point de la courbe $\mathcal{P}$ d'abscisse n.

On note a_n le coefficient directeur de la droite $(A_n A_{n+1})$.

Justifier que pour tout entier naturel n, on a $a_n = 2n - 4$.

☛ **Solution**:

Calcul des coordonnées de A_n et de A_{n+1} en fonction de n

$x_{A_n} = n$

$y_{A_n} = g(n) = n^2 - 5n + 4$

donc $A_n(n; n^2 - 5n + 4)$

$x_{A_{n+1}} = n + 1$

$y_{A_{n+1}} = g(n+1)$

$= (n+1)^2 - 5(n+1) + 4$

$= n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 + 4$

$= n^2 - 3n$

donc $A_{n+1}(n+1; n^2 - 3n)$

$$a_n = \frac{y_{A_{n+1}} - y_{A_n}}{x_{A_{n+1}} - x_{A_n}}$$
$$= \frac{n^2 - 3n - (n^2 - 5n + 4)}{n + 1 - n}$$
$$= \frac{n^2 - 3n - n^2 + 5n - 4}{1}$$
$$= 2n - 4$$

$\boxed{\text{donc on a bien } a_n = 2n - 4}$

c) Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

☛ **Solution**:

$u_n = u_0 + n \times r$ avec $u_0 = -4$ et $r = 2$

$\boxed{\text{donc } (u_n) \text{ est arithmétique de raison } r = 2 \text{ et de premier terme } u_0 = -4}$

Remarque

On peut aussi vérifier que la différence de deux termes consécutifs a_{n+1} et a_n est constante.

$a_{n+1} = 2(n+1) - 4 = 2n - 2$

$a_{n+1} - a_n = 2n - 2 - (2n - 4) = 2n - 2 - 2n + 4 = 2$

donc la différence de deux termes consécutifs est constante et $r = 2$.

2. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ par

$f(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

a) Vérifier que pour tout réel x, de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ on a $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 5 + \frac{4}{x} \\ &= \frac{(x-5)x}{x} + \frac{4}{x} \\ &= \frac{x^2 - 5x + 4}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } f(x) = \frac{g(x)}{x}}$$

b) À l'aide de la question 1. a, déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

☛ **Solution**:

On a $x \in [0,5\ ;\ 8]$ donc $x > 0$

donc $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ est du même signe que $g(x)$

D'après la question 1, $g(x) > 0$ sur $[0,5;1[\cup]4;8]$ et $g(x) < 0$ sur $]1;4[$

$$\boxed{\text{donc } \mathcal{C} \text{ est en dessous de l'axe des abscisses sur }]1;4[\text{ et au-dessus sinon.}}$$

c) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

Montrer que tout réel x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ on a :

$f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$

☛ **Solution**:

$f(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x} = x - 5 + 4 \times \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 1 + 4 \times \dfrac{-1}{x^2}$

$$= 1 - \frac{4}{x^2}$$
$$= \frac{x^2-4}{x^2}$$
$$= \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

$$\boxed{\text{donc } f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}}$$

d) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

☛ **Solution**:

Sur $[0,5\ ;\ 8]$, on a $x^2 > 0$ et $x+2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-2$

soit $f'(x) > 0$ pour $x > 2$

$f(0,5) = 0,5 - 5 + \frac{4}{0,5} = 0,5 - 5 + \frac{8}{1} = 0,5 - 5 + 8 = 3,5$

$f(2) = 2 - 5 + \frac{4}{2} = -3 + 2 = -1$

$f(8) = 8 - 5 + \frac{4}{8} = 3 + 0,5 = 3,5$

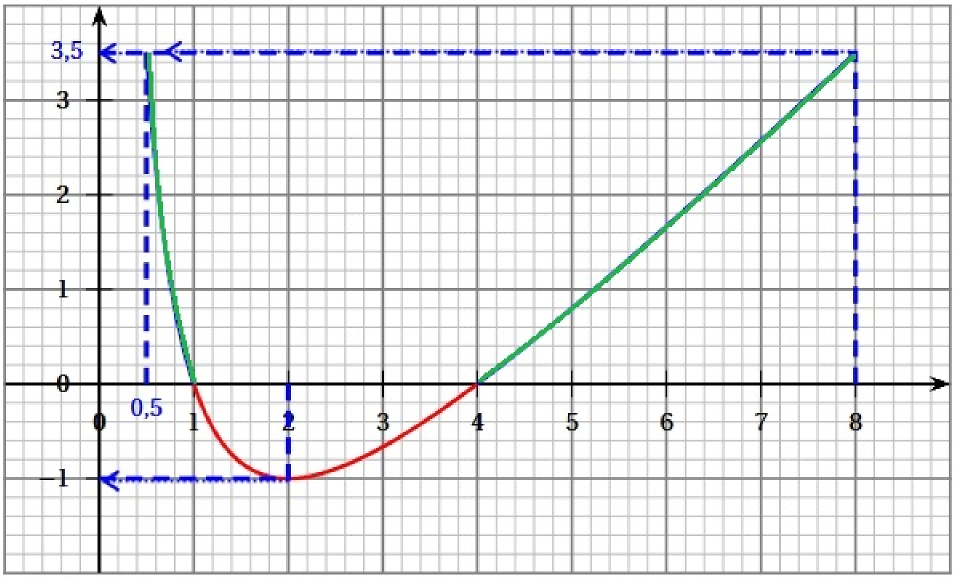
x	0,5		2		8
$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$		$-$	0	$+$	
variations de f	3,5	↘	-1	↗	3,5

e) Réaliser un schéma de l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ sur lequel apparaîtront les résultats des questions 2.b et 2.d.

☛ **Solution**:

D'après le 2b la courbe coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et en $x = 4$ et la courbe est en dessous de l'axe des abscisses sur $]1;4[$

D'autre part, le minimum de f est atteint en $x = 2$ et vaut -1


3,5
3
2
1
0
−1
0
0,5
1
2
3
4
5
6
7
8