



PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

1. Le nombre $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times 4$ est égal à :

A. 8	B. $\frac{13}{2}$	C. 4	D. $\frac{16}{8}$
------	-------------------	------	-------------------

☛ **Solution:**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times 4 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{12}{2} \\ &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Réponse B.

2. Le volume de la partie visible d'un iceberg est d'environ 10% de son volume total.

Si la partie visible d'un iceberg est de 150 km^3 , quel sera le volume total de cet iceberg ?

A. 1350 km^3	B. 1500 km^3	C. 15 km^3	D. 135 km^3
------------------------	------------------------	----------------------	-----------------------

☛ **Solution:**

Si on note V le volume total de cet Iceberg, on a :

$$\frac{10}{100} \times V = 150 \iff 0,1V = 150 \iff V = \frac{150}{0,1} = 1500$$

Réponse B.

3. Le prix d'un article est multiplié par 0,845.

Cela signifie que le prix de cet article a :

A. augmenté de 84,5 %	B. baissé de 1,55 %
C. augmenté de 15,5 %	D. baissé de 15,5 %



☛ **Solution:**

$$t = (k - 1) \times 100 = (0,845 - 1) \times 100 = -0,155 \times 100 = -15,5 \%$$

Réponse D.

4. On considère la fonction A définie pour tout réel x par : $A(x) = (x + 5)(x + 8)$

Le tableau de signes de $A(x)$ sur \mathbb{R} est :

A.					B.				
x	$-\infty$	-8	-5	$+\infty$	x	$-\infty$	-5	$+\infty$	
$A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
C.					D.				
x	$-\infty$	-8	-5	$+\infty$	x	$-\infty$	5	8	$+\infty$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

☛ **Solution:**

$$x + 5 = 0 \iff x = -5$$

$$\text{et } x + 8 = 0 \iff x = -8$$

Les deux valeurs à placer dans le tableau sont -5 et -8 .

Si on développe, le coefficient de x^2 est 1 et est donc positif.

donc $A(x)$ est du signe de $a = 1$ coefficient de x^2 à "l'extérieur" des racines donc positif.

Réponse C.

5. Un singe choisit une lettre au hasard parmi les lettres de l'alphabet.

On note les évènements :

V : "Le singe choisit une voyelle."

M : "Le singe choisit une des lettres du mot SINGE"

Rappel : L'alphabet est constitué de 26 lettres dont les voyelles sont : A, E, I, O, U, Y.

On note $p_M(V)$ la probabilité que le singe choisisse une voyelle sachant qu'il a choisi une lettre du mot SINGE.



On peut alors affirmer que $p_M(V)$ vaut :

A. $\frac{6}{26}$	B. $\frac{2}{5}$	C. $\frac{2}{6}$	D. $\frac{5}{6}$
-------------------	------------------	------------------	------------------

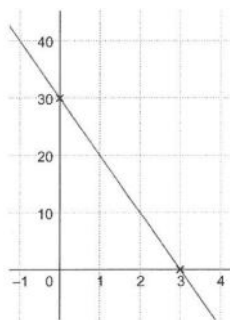
☛ **Solution:**

$$p(M) = \frac{5}{26} \text{ et } p(M \cap V) = \frac{2}{26} \text{ (il y a seulement deux voyelles dans le mot SINGE.)}$$

$$p_M(V) = \frac{p(M \cap V)}{p(M)} = \frac{\frac{2}{26}}{\frac{5}{26}} = \frac{2}{5}$$

Réponse B.

6. Soit f une fonction affine, dont on a tracé la représentation graphique dans le repère ci-dessous.



Une expression algébrique de f est :

A. $f(x) = -x + 30$	B. $f(x) = 30x + 3$
C. $f(x) = -10x + 30$	D. $f(x) = -\frac{1}{10}x + 30$

☛ **Solution:**

$$\text{On a } f(0) = 30 \text{ et } f(3) = 0$$

$$\text{Si } f(x) = -10x + 30 \text{ on a } f(0) = -10 \times 0 + 30 = 30 \text{ et } f(3) = -10 \times 3 + 30 = 0$$

Réponse C.

7. La forme développée et réduite de l'expression $(x + 2)^2 - (1 - x)^2$ vaut :

A. $2x^2 + 3$	B. $6x + 3$	C. $2x + 5$	D. $2x^2 + 2x + 3$
---------------	-------------	-------------	--------------------

☛ **Solution:**



$$\begin{aligned}
 &(x + 2)^2 - (1 - x)^2 \\
 &= x^2 + 4x + 4 - (1 - 2x + x^2) \\
 &= x^2 + 4x + 4 - 1 + 2x - x^2 \\
 &= 6x + 3
 \end{aligned}$$

Réponse B.

8. L'équation $2(x - 4) - (2x + 1) = 0$ admet :

A. Deux solutions : 4 et $\frac{1}{2}$	B. Deux solutions : 4 et $-\frac{1}{2}$
C. Aucune solution	D. Une infinité de solutions

• Solution:

$$\begin{aligned}
 &2(x - 4) - (2x + 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow &2x - 8 - 2x - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow &0x = 9 \\
 &\text{or } 0x = 0 \text{ pour tout réel } x
 \end{aligned}$$

Réponse C.

9. On considère le nombre réel : $E = \frac{2 \times 3^2}{27 \times 2^3}$

On peut affirmer que E est égal à

A. $\frac{1}{9}$	B. $\frac{1}{12}$	C. 12	D. $\frac{1}{6}$
------------------	-------------------	-------	------------------

• Solution:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{2 \times 3^2}{27 \times 2^3} \\
 &= \frac{2^1 \times 3^2}{3^3 \times 2^3} \\
 &= 2^{1-3} \times 3^{2-3} \\
 &= 2^{-2} \times 3^{-1} \\
 &= \frac{1}{2^2 \times 3^1}
 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{12}$$

Réponse B.

Remarque

On peut aussi décomposer puis simplifier

$$E = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2 \times 3}$$

Exercice 2 (6 points) probabilité et espérance | ★★ | temps estimé:25-30mn

Durant une fête foraine, une urne contient dix boules.

Chaque boule est soit verte, soit rouge, indiscernable au toucher.

Un jeu est proposé aux personnes présentes à la fête foraine.

Pour y participer le joueur doit d'abord payer 1 euro.

Ensuite, le joueur tire une première boule qu'il donne au forain, celui-ci note sa couleur puis remet la boule dans l'urne ;

le joueur tire une deuxième boule, le forain note la couleur de ce deuxième tirage et remet à nouveau la boule dans l'urne.

Voici les récompenses qu'il obtient :

si le joueur a tiré deux boules rouges, il reçoit 3 euros ;

si le joueur a tiré deux boules vertes, il reçoit 1 euro ;

sinon il ne reçoit pas d'argent.

Partie A

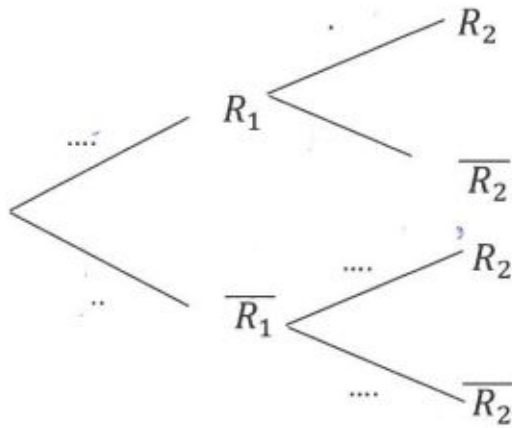
Dans cette partie, on considère que cette urne contient 1 boule rouge et 9 boules vertes.

On note :

R_1 l'événement : "La première boule tirée est rouge."

R_2 l'événement : "La deuxième boule tirée est rouge."

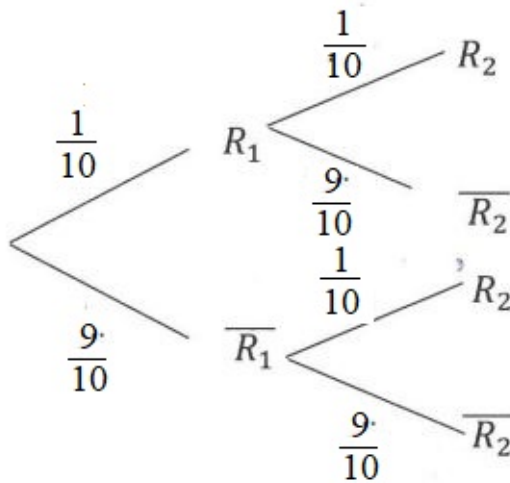
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



• Solution:

Il y a 10 boules au total et on remet la boule dans l'urne après chaque tirage donc ces deux tirages sont indépendants-

$$\text{donc } p(R_1) = p_{R_1}(R_2) = p(R_2) = \frac{1}{10}$$



2. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est-à dire la différence entre la somme reçue après les deux tirages et les frais de participation au jeu de 1 euro.

a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X .

• Solution:

Le joueur paie 1 euro pour participer.

S'il tire deux boules rouges, il reçoit 3 euros, donc son gain est de 2 euros.

S'il tire deux boules vertes, il reçoit 1 euro, donc son gain est de 0 euro.



Sinon, il ne reçoit rien, donc son gain algébrique est -1 euro.

La variable aléatoire X prend les valeurs $-1, 0, 2$.

b) Montrer que $p(X = -1) = \frac{18}{100}$

☛ **Solution:**

Le jouer perd un euro s'il obtient deux boules de couleurs différentes soit $R_1 \cap \overline{R_2}$ ou bien $\overline{R_1} \cap R_2$

$$\begin{aligned}
 p(X = -1) &= p(R_1 \cap \overline{R_2}) + p(\overline{R_1} \cap R_2) \\
 &= \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \\
 &= \frac{9}{100} + \frac{9}{100} \\
 &= \frac{18}{100}
 \end{aligned}$$

donc $p(X = -1) = \frac{18}{100}$

c) Recopier sur votre feuille et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

k			
$P(X = k)$			

☛ **Solution:**

$$\begin{aligned}
 p(X = 2) &= p(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \\
 p(X = 0) &= p(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100} \\
 p(X = -1) &= \frac{18}{100}
 \end{aligned}$$

On a donc :

k	-1	0	2
$P(X = k)$	$\frac{18}{100}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{1}{100}$

Remarque

Vérifier que la somme des probabilités est égale à 1



d) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

• **Solution:**

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times \frac{18}{100} + 0 \times \frac{81}{100} + 2 \times \frac{1}{100} \\ &= \frac{-18}{100} + \frac{2}{100} \\ &= \frac{-16}{100} \end{aligned}$$

$$E(X) = -0,16$$

Sur un très grand nombre de parties, le joueur va perdre en moyenne 0,16 euros.

PARTIE B

Dans cette partie, on considère que cette urne contient maintenant n boules rouges et $10 - n$ boules vertes où n est un nombre entier naturel avec $0 \leq n \leq 10$.

On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique après les deux tirages.

1. Démontrer que $E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}$

On expliquera la démarche mise en oeuvre. Toute démarche, même incomplète, sera prise en compte dans la notation.

• **Solution:**

Il y a 10 boules au total et on a maintenant $p(R_1) = p(R_2) = \frac{n}{10}$ et $p(\overline{R_1}) = p(\overline{R_2}) = \frac{10 - n}{10}$

$$p(X = 2) = p(R_1 \cap R_2) = \frac{n}{10} \times \frac{n}{10} = \frac{n^2}{100}$$

$$p(X = 0) = p(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \frac{10 - n}{10} \times \frac{10 - n}{10} = \frac{(10 - n)^2}{100}$$

$$p(X = -1) = p(\overline{R_1} \cap R_2) + p(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{n}{10} \times \frac{10 - n}{10} + \frac{10 - n}{10} \times \frac{n}{10} = \frac{2n(10 - n)}{100}$$

k	-1	0	2
$P(Y = k)$	$\frac{2n(10-n)}{100}$	$\frac{(10-n)^2}{100}$	$\frac{n^2}{100}$

$$\begin{aligned} E(Y) &= -1 \times \frac{2n(10 - n)}{100} + 0 \times \frac{(10 - n)^2}{100} + 2 \times \frac{n^2}{100} \\ &= \frac{-20n + 2n^2}{100} + \frac{2n^2}{100} \end{aligned}$$





$$= \frac{4n^2 - 20n}{100}$$

$$\text{donc } E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}$$

2. Pour combien de boules rouges dans l'urne le jeu est-il équitable entre le joueur et le forain ?

• **Solution:**

Le jeu est équitable si en moyenne, aucun des deux ne perd de l'argent ni n'en gagne soit

$$E(Y) = 0$$

$$E(Y) = 0 \iff \frac{4n^2 - 20n}{100} = 0$$

$$\iff 4n^2 - 20n = 0$$

$$\iff n(4n - 20) = 0$$

$$\iff n = 0 \text{ ou } 4n - 20 = 0$$

$$\iff n = 0 \text{ ou } n = \frac{20}{4} = 5$$

Le jeu est équitable si $n = 0$ ou bien $n = 5$

Exercice 3 (4 points) Suites géométriques | ★★ | temps estimé:25-30mn |

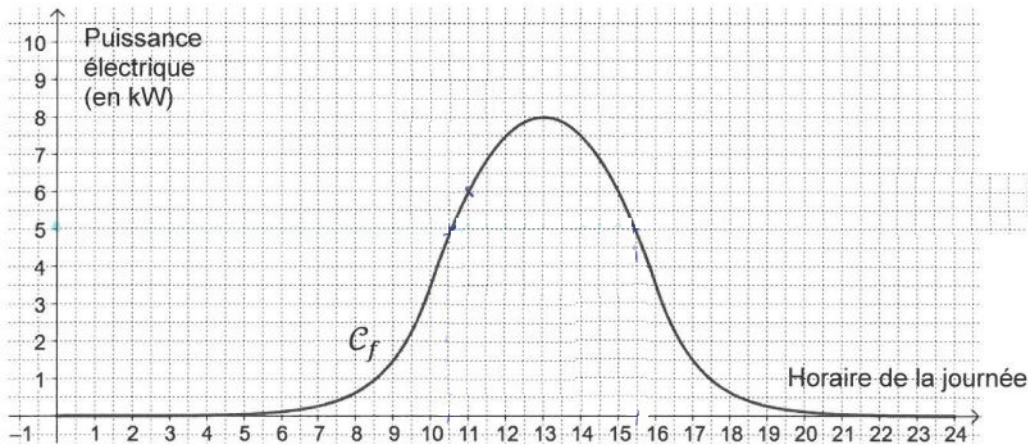
Pour réduire sa facture d'électricité, Camille a décidé de faire poser des panneaux solaires sur le toit de sa maison.

Il souhaite analyser sa production et estimer le temps nécessaire pour rentabiliser cet investissement.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

PARTIE A

Lors d'une belle journée ensoleillée, la puissance électrique en kilowatt (kW) des panneaux solaires de Camille peut être modélisée en fonction de l'heure par une fonction f . On admet que f est définie sur $[0; 24]$ et on donne sa courbe représentative C ci-dessous.

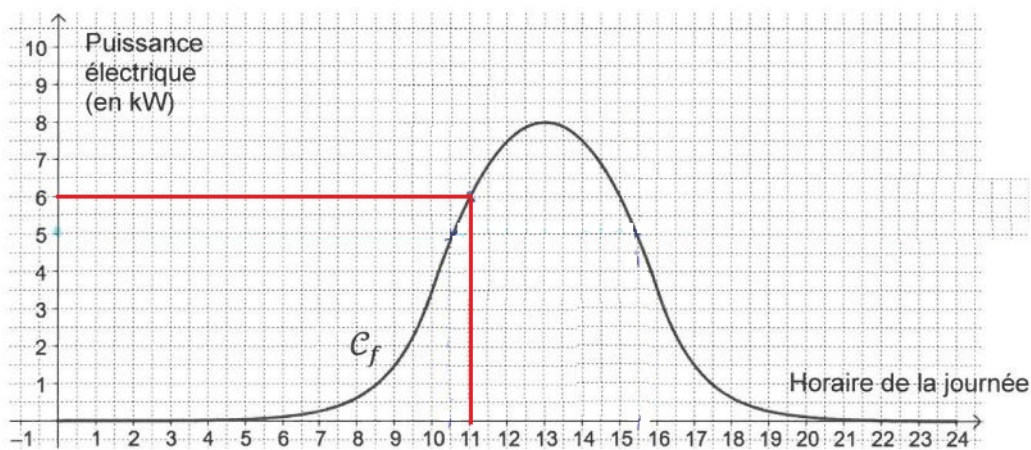


Avec la précision permise par le graphique :

1. Donner la puissance électrique des panneaux solaires à 11h00.

• **Solution:**

D'après le graphique on a $f(11) \approx 6$

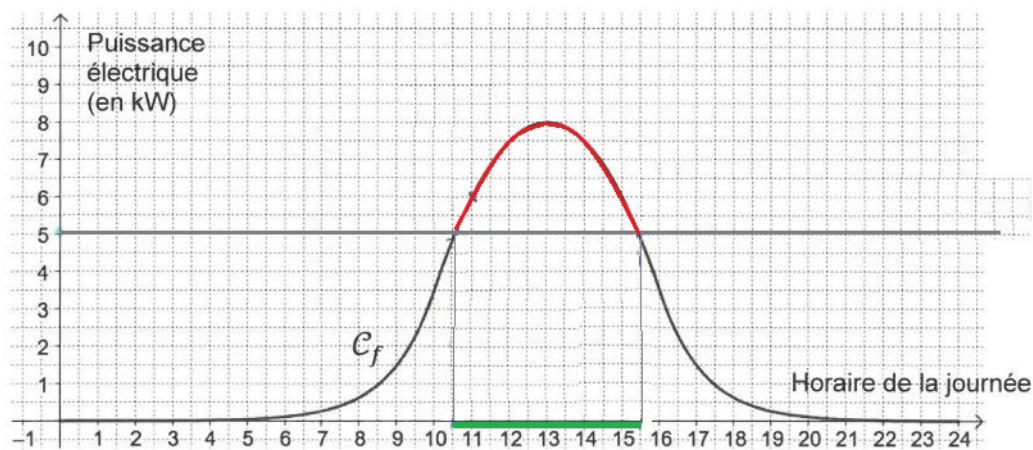


A 11h la puissance est de 6 kW.

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 5$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

• **Solution:**

Les solutions de $f(x) \geq 5$ sont les abscisses(en vert) des points de la courbe (en rouge) situés au-dessus de la droite d'équation $y = 5$



$$f(x) \geq 5 \text{ pour } x \in [10,5; 15,5]$$

La puissance fournie est supérieure ou égale à 5 kW entre 10h30 et 15h30.

Partie B

Le coût pour 1 kilowattheure (kWh) consommé au tarif réglementé était de 0,15 euros en 2020.

On admet que ce tarif réglementé augmente de 6 % chaque année.

On note C_n , le coût en euros pour 1 kWh consommé durant l'année 2020 + n , avec n un entier naturel.

On a alors $C_0 = 0,15$.

1. Déterminer la nature de la suite (C_n) . On précisera sa raison.

Solution:

Augmenter une valeur de 6% revient à appliquer le coefficient multiplicateur $1 + \frac{6}{100} = 1,06$

On a donc $C_{n+1} = 1,06C_n$

$$\text{donc } (C_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 1,06$$

2. Pour tout entier naturel n , exprimer C_n en fonction de n .

Solution:

(C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $C_0 = 0,15$



$$\text{donc } C_n = C_0 \times q^n = 0,15 \times 1,06^n$$

3. Donner le calcul permettant d'obtenir le coût pour 1 kWh consommé en 2030.

Il n'est pas demandé d'effectuer ce calcul.

• Solution:

$$2030 = 2020 + 10 \text{ donc on a } n = 10$$

$$C_{10} = 0,15 \times 1,06^{10}$$

En 2030, le coût du kWh sera de $C_{10} = 0,15 \times 1,06^{10}$ euros.

4. On admet que, chaque année depuis 2020, l'utilisation des panneaux solaires de Camille lui a permis d'éviter l'achat de 2000 kWh par an.

L'installation des panneaux solaires en janvier 2020 a coûté à Camille 7000 euros.

On considère le programme Python ci-dessous.

```
n = 0
c = 0.15
s = 0
while s < 7000 :
    s = s + c*2000
    n = n+1
    c = 1.06*c
print(n)
```

a) Dans le contexte de l'énoncé, que représentent les variables c et s du programme ?

• Solution:

A chaque passage dans la boucle, on calcule $1,06c$ soit le coût du kWh l'année suivante et on ajoute à S la valeur $200 \times c$ soit le montant économisé avec les 200kW fournis par les panneaux solaires

donc c représente le coût du kW et S pour l'année n et S le montant total économisé après n années.



b) On exécute le programme ci-contre.

Il affiche 16.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

☛ **Solution:**

On effectue des passages dans la boucle TANT QUE jusqu'à ce que la somme S économisée dépasse 7000 euros

donc il faudra 16 années pour que les économies soient supérieures à la dépense effectuée pour installer les panneaux solaires

L'investissement sera amorti à partir de $2020 + 16 = 2036$

Exercice 4 (4 points) Fonction exponentielle ★ | temps estimé:20-25mn

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (4x - 4)e^{-0,5x} + 5$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x + 6)e^{-0,5x}$

☛ **Solution:**

On pose $u(x) = 4x - 4$ et $v(x) = e^{-0,5x}$ dérivables sur \mathbb{R}

et on a $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 0 \\ &= 4e^{-0,5x} + (4x - 4) \times (-0,5)e^{-0,5x} \\ &= 4e^{-0,5x} + (-2x + 2)e^{-0,5x} \\ &= e^{-0,5x}(4 - 2x + 2) \\ &= e^{-0,5x}(-2x + 6) \end{aligned}$$

donc $f'(x) = e^{-0,5x}(-2x + 6)$



2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} puis en déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

☛ **Solution:**

Pour tout réel x on a $e^{-0,5x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $-2x + 6$

$$-2x + 6 > 0 \iff -2x > -6 \iff x < 3$$

donc $f'(x) > 0$ sur $] -\infty; 3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3; +\infty[$

donc f croissante sur $] -\infty; 3[$ et f décroissante sur $]3; +\infty[$.

3. La courbe \mathcal{C}_f , admet-elle des points pour lesquels la tangente est horizontale ?

Si oui, on précisera les coordonnées exactes de ces éventuels points.

☛ **Solution:**

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x est donné par $f'(x)$ et une tangente parallèle à l'axe des abscisses a pour coefficient directeur 0

donc il faut résoudre l'équation $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \iff e^{-0,5x}(-2x + 6) = 0$$

$$\iff -2x + 6 = 0 \text{ car } e^{-0,5x} > 0$$

$$\iff -2x = -6$$

$$\iff x = 3$$

$$f(3) = (4 \times 3 - 4)e^{-0,5 \times 3} + 5 = 8e^{-1,5} + 5 = \frac{8}{e^{1,5}} + 5$$

La tangente est horizontale au point de la courbe de coordonnées $\left(3; \frac{8}{e^{1,5}} + 5\right)$